第五章 导数和微分.

概念: derivative 导数 → 描述函数变化快慢(率 rate)

} 可导

微分学 differential 微分 → 描述函数变化程度(量 quantity)

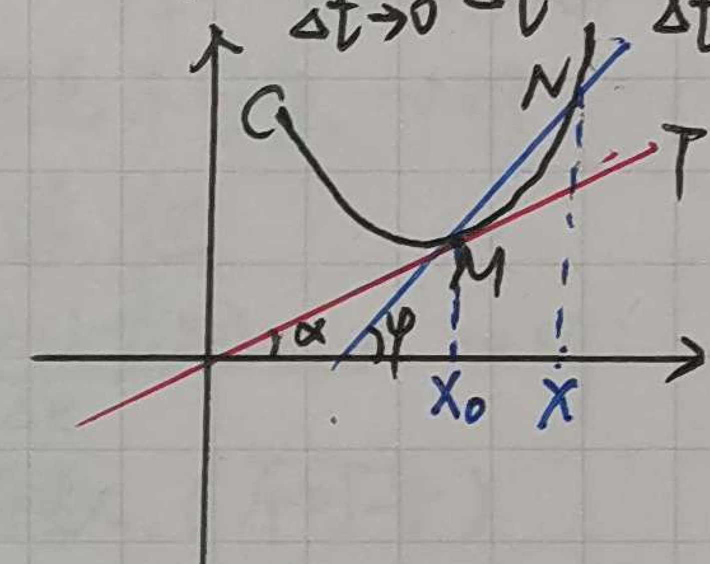
都是描述物质运动的工具(从微观上研究)

一、导数的定义: ——→ 实质: 增量比的极限

1. 瞬时速度 ⇒ 若物体运动路程方程为 $s=s(t)$ <对时间而言>

则有物体在时刻 t_0 时的瞬时速度为 $v(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$

2. 切线 —— 割线的极限位置 → 切线位置.



切线MT即割线MN当动点N无限接近M的极限位置.

则有 $|MN|\to 0$ $\angle NMT\to 0$ 令 $M(x_0,y_0)$ $N(x,y)$

有割线MN斜率: $\tan\varphi=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

切线MT则有: $N\xrightarrow{\text{沿曲线C}}M\Rightarrow x\to x_0$. $k=\tan\alpha=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (若极限存在)

斜率

⇒引出定义: 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义、若极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在、则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导、并称上述极限为函数 f 在点 x_0 处导数 ($f'(x_0)$)

令 $x=x_0+\Delta x$. $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 则 $f'(x_0)$ 可改写:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

又有函数增量(Δy)与自变量增量(Δx)之比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (增量比)称作

函数关于自变量的平均变化率(差商)

则有 $f'(x_0)$ 为 f 在 x_0 处关于 x 的变化率.

ps. $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 极限不存在、即称 f 在点 x 处不可导.

⇒有限增量公式: 设 $f(x)$ 在点 Δx 可导 则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$

那么 $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小量.

于是有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\varepsilon\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0\Rightarrow\varepsilon\cdot\Delta x=o(\Delta x)$

即 $\Delta y-\Delta x f'(x_0)=o(\Delta x)$ ⇒ $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$

此公式对 $\Delta x=0$ 仍旧成立

$f(x)$ 在点 x_0 的有限增量公式

⇒定理：若函数 f 在点 x_0 可导，则 f 在点 x_0 连续。

ps. 该定理逆定理不成立

关于上述定理

由于要使 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则当 $\Delta x\to 0$ 时 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 是 $\frac{0}{0}$ 形式，则有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

⇒可导必连续。

关于有限增量公式

$o(\Delta x)$ 为 Δx 的高阶无穷小量

变形

⇒一阶逼近：$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$

零阶逼近：$f(x)=A+o(1)$ ⇐ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

Tips

但连续不一定可导!!!

KNOW

奇异：singular

不可导点 ⇔ 奇异点

singular point

eg：连续函数不可导：

① 函数 $f(x)$ 连续，若 $f'_-(x_0)\neq f'_+(x_0)$，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的角点，函数在角点不可导。→eg：$y=|x|\ (x=0)$

② 设函数在 x_0 点处连续，但 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\infty$ →eg：$y=\sqrt[3]{x-1}$ $(x=1)$

称 $f(x)$ 在点 x_0 处有无穷导数。（不可导）

③ 函数 $f(x)$ 在连续点的左右导数都不存在（指摆动不定）则 x_0 点不可导。→eg：$f(x)=\begin{cases}x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ $(x=0)$

⇒定义：（单侧导数）

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某右邻域 $[x_0,x_0+\delta)$ 上有定义，若右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\quad(0<\Delta x<\delta)$$

存在，则称该极限值为 f 在点 x_0 的右导数，记 $f'_+(x_0)$ 类似可定义左导数。

右导数和左导数统称为单侧导数

总结定义：

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

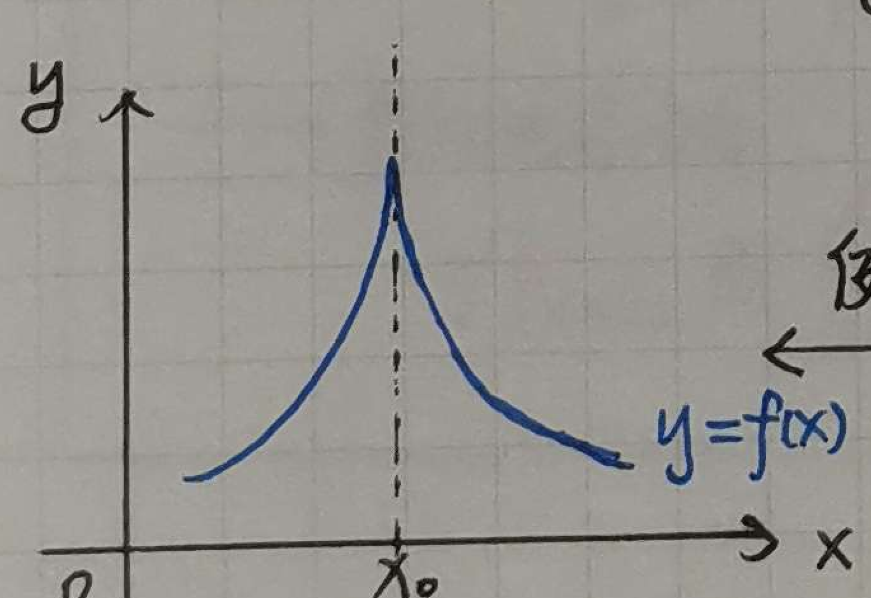
$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$(0<\Delta x<\delta)$

⇒引出定理：（上述不可导情况源头）

若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域上有定义，则 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是：$f'_+(x_0)$ 与 $f'_-(x_0)$ 都存在，且有 $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

（用于讨论某点是否可导）



例图

eg：不可导补充：

④ 若 $f'(x_0)=\infty$，且在点 x_0 的两个单侧导数符号相反，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的尖点（不可导点）

即可通过定理拓展出：

如果 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导、且 $f'_+(a)$ 及 $f'_-(b)$ 都存在、就说：

$f(x)$ 在 闭区间 $[a,b]$ 上可导

也可运用定理具体讨论可导性：→ 不连续、一定不可导；连续 → 直接用定义 / 看左右导数是否存在且相等

例 设函数 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\geq x_0\\ \psi(x), & x<x_0\end{cases}$，讨论在点 x_0 的可导性。

若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\psi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}$，则 x_0 处可导。

另有：
$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\begin{cases}\dfrac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}, & \Delta x>0 \to \text{可求 } f'_+(x_0)\\ \dfrac{\psi(x_0+\Delta x)-\psi(x_0)}{\Delta x}, & \Delta x<0 \to \text{可求 } f'_-(x_0)\end{cases}$$

进而可判断。

导数及可导问题上特例

① 仅在一点处可导的例子：$f(x)=x^2D(x)$

<仅在 $x_0=0$ 处可导>

② 常量函数任一点导数均为 0

二、导函数

若函数在区间 I 上每一点都可导（对区间端点，仅考虑相应的单侧导数），则称 f 为区间 I 上的可导函数。

此时对于 $\forall x\in I$，都有 f 的一个导数 $f'(x)$（或单侧导数）与之对应，这样便定义了一个在 I 上的函数，称 f 在 I 上的导函数。

→ 简称：导数

→ 符号表示：f' / y' / $\dfrac{dy}{dx}$ / $\dot{y}$

关于 $\dfrac{dy}{dx}$：有话说

$\dfrac{dy}{dx}$ → 可视：一个整体
→ 可视：$\dfrac{d}{dx}$ 施加于 y 的运算
→ 可视：一个商。

→ $f'(x_0)$ 也可记为：

$y'|_{x=x_0}$ 或 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$

三、导数的几何意义

切线

→ 由导数的定义 切线斜率为 $k=f'(x_0)$

则有曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的切线：

（方程）$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

法线

→ 由解析几何，若切线斜率为 k，

则有法线斜率为 $-\dfrac{1}{k}$

从而曲线 $y=f(x)$ 在点 (x_0,y_0) 处的法线：

（方程）$y-y_0=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

极值点 <函数局部性质>

→ 若函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上对一切 $x\in U(x_0)$ 有：$f(x_0)\geq f(x)$ （$f(x_0)\leq f(x)$），则称函数 f 在点 x_0 取极大(小)值，称 x_0 为极大(小)值点。极大值与极小值统称为极值。极大值点、极小值点统称为极值点。

ps：若 $f'(x_0)$ 存在且不为 0，则 x_0 不是 $f(x)$ 的极值点。

费马(Fermat)定理

→ 设函数 f 在点 x_0 的某邻域上有定义，且在点 x_0 上可导。若 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$

稳定点 | 临界点

驻点

我们把满足 $f'(x)=0$ 的点，称作稳定点。

故：极值点一定是稳定点，
但稳定点不一定是极值点。

导数 → 例题.

$f(x)$在$\mathbb{R}$上，有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ ，$(\forall x_1,x_2\in\mathbb{R})$ ，$f'(0)=1$.

求证：$\forall x\in\mathbb{R}$ ，$f'(x)=f(x)$

证：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)[f(\Delta x)-f(0)]}{\Delta x}=f(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=f(x)\cdot f'(0)=f(x).$$

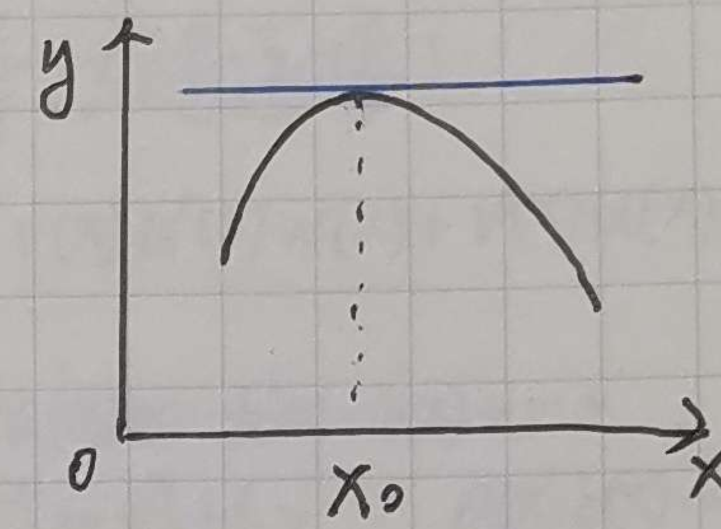
$$f(x+0)=f(x)\cdot f(0)\Rightarrow f(x)[f(0)-1]=0\Rightarrow\begin{cases}f(x)\equiv 0\to \text{与}f'(0)=1\text{矛盾（舍）}\\ f(0)=1\to f(0)=f'(0)\end{cases}$$

对费马定理：有

- 疏理 —— $\left.\begin{array}{l} y=f(x)\text{ 在 } U(x_0)\text{ 有定义} \\ f(x)\le f(x_0)\ (\ge),\ f'(x_0)\text{ 存在} \end{array}\right\} \rightarrow f'(x_0)=0$

- 几何意义 —— 若函数$f(x)$在极值点$x=x_0$可导，那么在该点平行线平行于x轴.

- 证明 —— 证：设 $\forall x_0+\Delta x\in U(x_0)$，$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$



则 $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$$=\begin{cases} f'_-(x_0)\ge 0 & (\Delta x\to 0^-) \\ f'_+(x_0)\le 0 & (\Delta x\to 0^+) \end{cases}$$

则可推出：$f'(x_0)=0$ （极小值同理可证）

基本初等函数导数公式

原函数		导函数
$y=C$		$y'=0$
$y=x^\alpha$		$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
$y=\sin x$		$y'=\cos x$
$y=\cos x$		$y'=-\sin x$
$y=a^x$	$a>0$ 且 $a\ne 1$	$y'=a^x\ln a$
$y=\log_a\lvert x\rvert$	$a>0$ 且 $a\ne 1$	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
$y=\arcsin x$		$y'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y=\arccos x$		$y'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y=\tan x\rightarrow y'=\sec^2 x$

$y=\sec x\rightarrow y'=-\csc^2 x$

$y=\csc x\rightarrow y'=\sec x\cdot\tan x$

$y=\cot x\rightarrow y'=-\csc x\cdot\cot x$

$\boxed{\cot x=\dfrac{1}{\tan x}\quad \sec x=\dfrac{1}{\cos x}\quad \csc x=\dfrac{1}{\sin x}}$

esp：$y=e^x\rightarrow y'=e^x$

$y=\ln\lvert x\rvert\rightarrow y'=\dfrac{1}{x}$

$y=\arctan x\rightarrow y'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$y=\operatorname{arccot} x\rightarrow y'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

<黎曼函数处处不可导>

（双曲函数 / 反双曲函数）

记：$y=\sinh x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ $(\operatorname{sh}x)$ → 奇函数 $\Rightarrow y'=\operatorname{ch}x$

$y=\cosh x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(\operatorname{ch}x)$ → 偶函数 $\Rightarrow y'=\operatorname{sh}x$

$y=\operatorname{th}x \Downarrow y'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$

$y=\operatorname{arsinh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ $(\operatorname{arsh}x)$ $\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

$y=\operatorname{arcosh}x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$ $(\operatorname{arch}x)$ $\Rightarrow y'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$

求导法则

四则运算

$$(u\pm v)' = u' \pm v'$$

$$(uv)' = u'v + uv' \;;\quad (\underset{=}{c}u)' = cu' \text{ (eg)}$$

常数

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2} \;;\quad \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ (eg)}$$

乘法求导：轮流原则（轮流求导，加号连接）

eg: $[v(x)u(x)w(x)]' = v'(x)u(x)w(x) + v(x)u'(x)w(x) + v(x)u(x)w'(x)$

普适性 → $[a(x)b(x)\cdots z(x)]' = a'(x)b(x)\cdots z(x) + a(x)b'(x)\cdots z(x) + \cdots + a(x)b(x)\cdots h'(x)\cdots z(x) + \cdots + a(x)b(x)\cdots z'(x)$

<即可推广到任意有限个函数乘积的情形>

证明方法：加一项、减一项 → 举两项相乘为例：$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

证：令 $f(x) = u(x)v(x)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x) - u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x)v(x_0+\Delta x) \overbrace{- u(x_0)v(x_0+\Delta x) + u(x_0)v(x_0+\Delta x)}^{\text{加一项减一项}} - u(x_0)v(x_0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{u(x_0+\Delta x) - u(x_0)}{\Delta x}\cdot v(x_0+\Delta x) + \lim_{\Delta x\to 0} \frac{v(x_0+\Delta x) - v(x_0)}{\Delta x}\cdot u(x_0)$$

$$= u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

反函数导数

设 $y=f(x)$ 为 $x=\varphi(y)$ 的反函数，若 $\varphi(y)$ 在点 y_0 的某邻域上连续、严格单调且 $\varphi'(y_0)\neq 0$，则 $f(x)$ 在点 x_0 ($x_0=\varphi(y_0)$) 可导，且 $f'(x_0) = \frac{1}{\varphi'(y_0)}$

举例运用：试证：$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ①；$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ②

$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ③；$(\mathrm{arccot})' = -\frac{1}{1+x^2}$ ④

证①：$\forall x_0 \in [-1,1]$，$x = \varphi(y) = \sin y$，

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\varphi'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同理②：$x = \varphi(y) = \cos y$

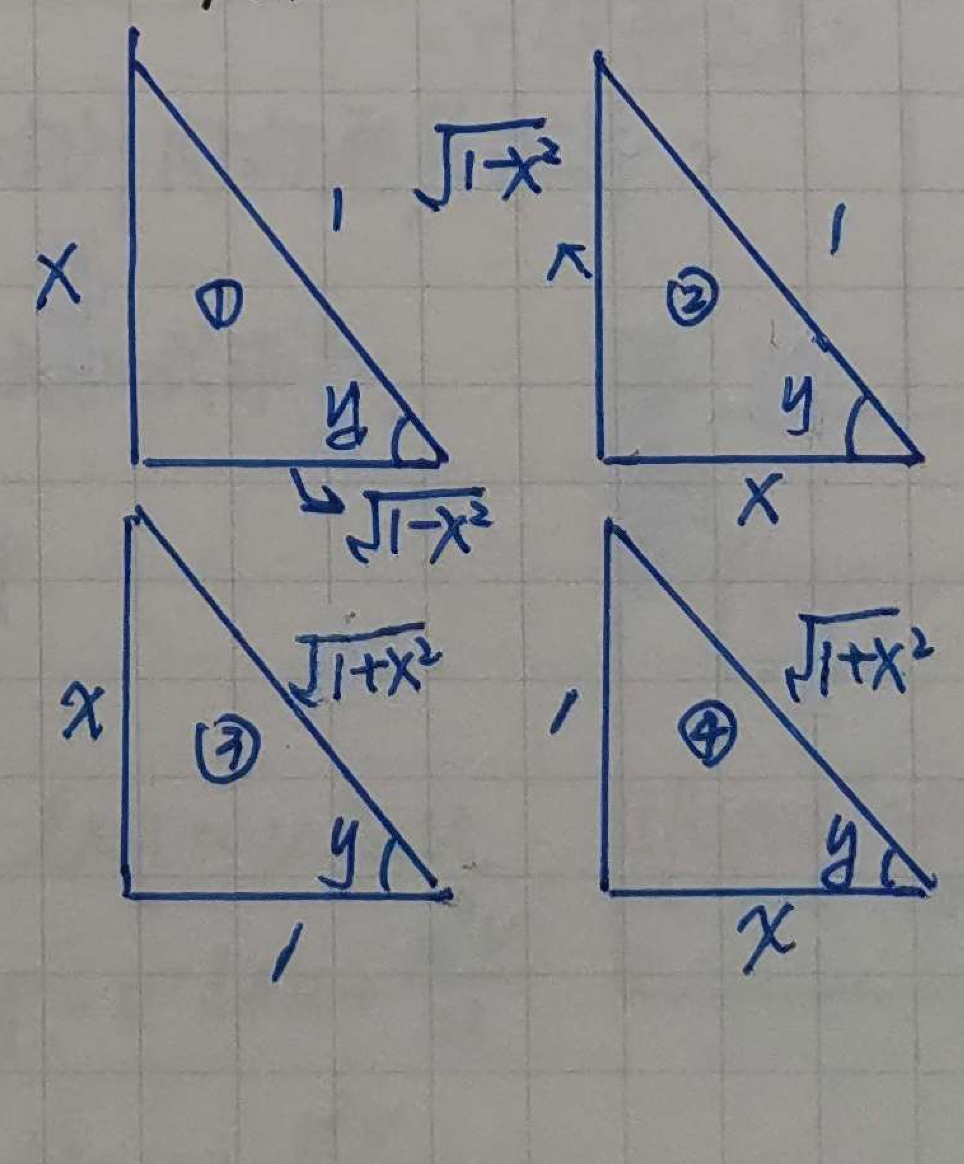
$$(\arccos x)' = \frac{1}{\varphi'(y)} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

同理③：$x = \varphi(y) = \tan y$

$$(\arctan x)' = \frac{1}{\varphi'(y)} = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$$

同理④：$x = \varphi(y) = \cot y$

$$(\mathrm{arccot}\,x)' = \frac{1}{\varphi'(y)} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1+x^2}$$



⋮

⋮

复合函数求导 — 设 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 可导，$y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 可导，则复合函数 $f\circ\varphi$ 在点 x_0 可导，且 $(f\circ\varphi)'(x_0)=f'(u_0)\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0)$

亦称作链式法则 → $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

Tips
$f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件：
在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上，存在一个在点 x_0 连续的函数 $H(x)$，
使得：$f(x)-f(x_0)=H(x)(x-x_0)$
从而 $f'(x_0)=H(x_0)$

证明：$f(u)$ 在 u_0 可导 ⇒ 存在一个在点 u_0 连续的函数 $F(u)$，
使得：$f'(u_0)=F(u_0)$ 且 $f(u)-f(u_0)=F(u)(u-u_0)$ ① $\langle u\in U(u_0)\rangle$
$u=\varphi(x)$ 在 x_0 可导 ⇒ 存在一个在点 x_0 连续的函数 $\Phi(x)$，
使得：$\varphi'(x_0)=\Phi(x_0)$ 且 $\varphi(x)-\varphi(x_0)=\Phi(x)(x-x_0)$ ② $\langle x\in U(x_0)\rangle$
则有：$(f\circ\varphi)'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{(f\circ\varphi)(x)-(f\circ\varphi)(x_0)}{x-x_0}$

$$\overset{①}{=}\lim_{x\to x_0}\frac{F(\varphi(x))[\varphi(x)-\varphi(x_0)]}{x-x_0}=F(\varphi(x_0))\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}$$

$$=F(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)=f'(\varphi(x_0))\cdot\varphi'(x_0)$$

eg: $y=f(f(f(x)))\rightarrow y'=f'(f(f(x)))\cdot f'(f(x))\cdot f'(x)$

链式法则 ⟶ 可推广：对于由多个函数复合而得到的复合函数，导数公式可反复应用链式法则求得。

即若：$y=f(u)$，$u=\varphi(v)$，$v=\psi(x)$。

$$y \xrightarrow{f} u \xrightarrow{\varphi} v \xrightarrow{\psi} x$$

则有：$y'(x)=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{\cancel{du}}\cdot\frac{\cancel{du}}{\cancel{dv}}\cdot\frac{\cancel{dv}}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(v)\cdot\psi'(x)$
〈可视为运算〉

〈搞清复合函数结构，由外向内逐层求导〉

区别
$f'(\varphi(x))=f'(u)\big|_{u=\varphi(x)}$
$(f(\varphi(x)))'=f'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

方法

对数求导法 — 适用
① 有连乘、有次方函数式求导。
② 幂指函数求导。

eg
对幂指函数 $y=u^v$ 求导：
两边同时取对数：$\ln y=v\ln u$
再两边求导：$\frac{1}{y}\cdot y'=v'\ln u+\frac{u'v}{u}$
$$\Rightarrow y'=u^v\left(v'\ln u+\frac{u'v}{u}\right)$$
$$=\underline{u^v\ln u\cdot v'}+\underline{vu^{v-1}\cdot u'}$$
指数函数求导公式　幂函数求导公式

定义：lim
求导法则