Key Points

Chapter IX 多元函数微分学

1. 重极限与累次极限 (补充) $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$, $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$

Example: $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0} 1+x=1$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0} -1+y=-1$$

Theorem: 若重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ 存在, 则累次极限皆存在且相等

逆否: 累次极限不存在或存在但不相等, 则重极限不存在

Skill: 计算重极限适时选用极坐标化单次极限.

2. 区分偏导数 (方向导数) 与全微分

线性拟合:

$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(\|x-x_0\|)$

$f(x,y)=f(x_0,y_0)+[f_x, f_y]\cdot\begin{bmatrix}x-x_0\\ y-y_0\end{bmatrix}+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)$

待确认

双偏导存在 $\not\Rightarrow$ 全微分. 反之可行.

因: 双偏导数仅两个方向线性拟合, 而全微分指整个邻域线性拟合

思考: 每个方向方向导数皆存在 (Gâteaux可微)
是否可知全微分? (Fréchet可微)

Answer: 不可以

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

取 $y=kx$, 验各方向导数皆存在.

取 $y=x^{3/2}$ 验不可全微分.

另一个例子: $f(x,y)=\begin{cases}\left[\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right]^2 & y\neq 0\\ 0 & y=0\end{cases}$ 可自己验证.

Chapter X: 二重积分及更高维. 原则: 化归多次一重积分.

关键: (1) 积分域把握到位

(2) 换元方法熟练 (影响积分域)

(3) 积分换序熟练 (不改变积分域) > 注意积分限改变

注意: (i) 积分换元时, 注意 Jacobi 行列式: $(x,y)\to(u,v)$

则 $dxdy=\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$

(ii) 适时调用 极坐标, 球坐标, 柱坐标.

N=2 时: 当区域呈放射状时, 常用极坐标: $\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\end{cases}$, $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=r$

N=3 时: 当区域呈轴放射状时, 常用柱坐标 (r,θ,z), $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|=r$

当区域呈点放射状时, 常用球坐标 (r,θ,φ), $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|=r^2\sin\varphi$

(iii) 注意对称性, 可减少不必要计算.

(iv) 积分域分析时, 往往有z轴旋转体区域: (出现 x^2+y^2 形式)

如 Ω: $z^2=x^2+y^2$ 与 $z=2$ 所围.

不妨令 $z^2=r^2$, 得到 z关于某极径"切"面形状, 再旋转一圈

如: Ω: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z=1$, $z=2$ 所围.

Ω: $z=2-(x^2+y^2)$ 与 $z=0$ 所围.

T1. 讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$ 存在性.

解: 取 $y=x$ 直接拍走

T2. 设 $z=f(u,v)$ 有二阶连续偏导数, $u=x+y$, $v=x\sin y$

计算: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=f_u(x+y,x\sin y)+\sin y\, f_v(x+y,x\sin y)$

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 计算. $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial f}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}=f_u(u,v)+f_v(u,v)\cdot x\cos y.$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial f_u}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_u}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}+f_v(u,v)\cos y+x\cos y\left(\frac{\partial f_v}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f_v}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$=f_{uu}(x+y,x\sin y)+f_{uv}(x+y,x\sin y)\sin y+f_v(x+y,x\sin y)\cos y$$
$$+f_{vu}(x+y,x\sin y)\cdot x\cos y+f_{vv}(x+y,x\sin y)\cdot x\sin y\cos y$$
$$=f_{uu}(u,v)+(x\cos y+\sin y)\cdot f_{uv}(u,v)+x\sin y\cos y\, f_{vv}(u,v)+\cos y\, f_v(u,$$

T3. $z=z(x,y)$ 由 $x^2-2z=f(y^2-2z)$ 所定隐函数 其中 f 可微, 求证: $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy$.

Proof: 对 x 偏导 $2x-2\dfrac{\partial z}{\partial x}=f'(y^2-2z)\cdot\left(-2\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$ ⋯ ①

对 y 偏导: $-2\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(y^2-2z)\cdot\left(2y-2\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)$ ⋯ ②

①×y + ②×x 得 $2xy-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}=f'(y^2-2z)\cdot\left[2xy-2y\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x\dfrac{\partial z}{\partial y}\right]$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$

所以或 $xy-y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$

或 $f'(y^2-2z)\equiv 1$, 这时: $x^2-2z=y^2-2z+C$, 无法确定 $z=z(x,y)$

来自 $F(x,y,z)=x^2-2z-f(y^2-2z)$

$\dfrac{\partial F}{\partial z}=0$, 无法确定隐函数

验得 $x\dfrac{\partial z}{\partial y}+y\dfrac{\partial z}{\partial x}=xy$.

T4 设 $z=\frac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 可微，证明：$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}$

Proof：$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'(x^2-y^2)}{f^2(x^2-y^2)}\cdot 2xy$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{f(x^2-y^2)-f'(x^2-y^2)\cdot(-2y)\cdot y}{f^2(x^2-y^2)}$

则 $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2yf'}{f^2}+\frac{\frac{1}{y}f+2yf'}{f^2}=\frac{1}{yf}=\frac{z}{y^2}$

T5. 齐次函数 Euler 定理：$F(x_1,\cdots,x_n)$ 是 n 元函数，$F(tx_1,\cdots,tx_n)=t^kF(x_1,\cdots,x_n)$ 称 k 次齐次函数.

验 $x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}+\cdots+x_n\frac{\partial F}{\partial x_n}=kF$

Proof：对 $F(tx_1,\cdots,tx_n)=t^kF(x_1,\cdots,x_n)$ 中的 t 求导，

$$x_1\frac{\partial F}{\partial x_1}(tx_1,\cdots,tx_n)+\cdots+x_n\frac{\partial F}{\partial x_n}(tx_1,\cdots,tx_n)=kt^{k-1}F(x_1,\cdots,x_n)$$

取 $t=1$ 直接推出.

T6 行列式函数求导：$D(t)=\det(a_{ij}(t))_{n\times n}$，$a_{ij}(t)$ 皆可微，$D'(t)=\sum_{i=1}^{n}\begin{vmatrix}a_{11}(t)&\cdots&a_{1n}(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}'(t)&\cdots&a_{in}'(t)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t)&\cdots&a_{nn}(t)\end{vmatrix}$

Proof：令 $t_1=t_2=\cdots=t_n=t$，有 $\frac{dt_i}{dt}=1$，$i=1,2,\cdots,n$.

$$D(t_1,\cdots,t_n)=\begin{vmatrix}a_{11}(t_1)&\cdots&a_{1n}(t_1)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}(t_i)&\cdots&a_{in}(t_i)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t_n)&\cdots&a_{nn}(t_n)\end{vmatrix}$$

则 $\frac{dD(t)}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_i}\cdot\frac{dt_i}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial D(t_1,\cdots,t_n)}{\partial t_i}$

而 Laplace 展开第 i 行：$D(t_1,\cdots,t_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t_i)A_{ij}(t_1,\cdots,t_{i-1},t_{i+1},\cdots,t_n)$，

有 $\frac{\partial D}{\partial t_i}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}'(t_i)\cdot A_{ij}=\begin{vmatrix}a_{11}(t_1)&\cdots&a_{1n}(t_1)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{i1}'(t_i)&\cdots&a_{in}'(t_i)\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n1}(t_n)&\cdots&a_{nn}(t_n)\end{vmatrix}$

T2 设 $D=\{(x,y): x^2+y^2\leq 4, x\geq 0\}$，计算 $\iint_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$

放射状

解：原式 $=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \frac{1+r^2\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\, r\,dr\,d\theta$

$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2\left[1+\frac{r^2(\cos\theta\sin\theta-1)}{1+r^2}\right]\cdot r\,dr\,d\theta$

$=2\pi+\frac{1}{2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^4 \frac{r}{1+r}\left(\frac{1}{2}\sin 2\theta-1\right)\cdot dr\,d\theta$ $\quad r=r^2$

$=2\pi+\frac{1}{2}\int_0^4\frac{r}{1+r}dr\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{4}\sin\theta-\frac{1}{2}\right)d\theta$ $\quad \theta=2\theta$

$=2\pi+\frac{1}{2}[4-\ln 5][-\pi]=\frac{\ln 5}{2}\pi$

T1 计算二重积分 $I=\iint_D\left(e^{y^2}\sin x+\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$，其中 $D=\{(x,y): 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$.

放射状

解：原式 $=\int_0^{2\pi}\int_1^2 r^2\,dr\,d\theta$

$=\frac{14}{3}\pi$

$e^{y^2}\sin x$ 对称性直接拿走.

T4 计算 $\iint_D xy\,dxdy$，其中 D 由双曲线 $x^2-y^2=1$ 及 $y=0, y=1$ 所围. 非放射状，且直线特征明显

解：被积关于 x 偶函数，仅积一侧.

原式 $=2\cdot\int_0^1\int_0^{\sqrt{y^2+1}} x^2y\cdot dx\cdot dy=\frac{2}{3}\cdot\int_0^1 (y^2+1)^{\frac{3}{2}}\cdot y\cdot dy=\frac{1}{3}\int_0^1 (y+1)^{\frac{3}{2}}dy=\frac{2}{15}\left[2^{5/2}-1\right]$

$=\frac{2}{15}\left[4\sqrt{2}-1\right]$

Skill：为方便计算，先择合适的积分顺序，原则：尽量少分类讨论.

T5：$f(x,y)$ 连续，$f(x,y)=f(y,x)$，证明 $\int_0^1\int_0^x f(x,y)\,dydx=\int_0^1\int_0^x f(1-x,1-y)\cdot dydx$ （换元，换序实例）

Proof: $\int_0^1\int_0^x f(x,y)\cdot dydx \xlongequal{x=1-x} \int_0^1\int_0^{1-x} f(1-x,y)\cdot dydx$

$$\xlongequal{换序} \int_0^1\int_0^{1-y} f(1-x,y)\cdot dx\cdot dy$$

$$= \int_0^1\int_0^{1-y} f(y,1-x)\cdot dxdy$$

$$\xlongequal{y=1-y} \int_0^1\int_0^y f(1-y,1-x)\,dx\cdot dy \xlongequal{记号} \int_0^1\int_0^x f(1-x,1-y)\cdot dy\,dx$$

T3. 计算二重积分 $\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$，其中 D: $0\le y\le\sqrt{2x-x^2}$，$1\le x\le 2$　　$x^2-2x+1+y^2\le 1$

放射状

解：原式 $=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{1}{1+\cos2\theta}r(\theta)}^{r(\theta)} \frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\theta$，$r(\theta)=\sqrt{(1+\cos2\theta)^2+\sin^2 2\theta}=\sqrt{2+2\cos2\theta}=\sqrt2\cdot\sqrt{2\cos^2\theta}=2\cos\theta$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos2\theta}{\cos\theta}\cdot d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(2\cos\theta-\frac{1}{\cos\theta}\right)d\theta$$

$$=\sqrt2+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1-\sin^2\theta}\,d\sin\theta$$

$$=\sqrt2+\frac12\int_0^{\frac{\sqrt2}{2}}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\,dx$$

$$=\sqrt2+\frac12\ln\left(\frac{1+\sqrt2/2}{1-\sqrt2/2}\right)=\sqrt2+\frac12\ln\left(\frac{2+\sqrt2}{2-\sqrt2}\right)$$

三重积分

T1 $\iiint\limits_V \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dx\,dy\,dz$，V是由 $x+y+z=1$ 与三个坐标面所围.

明显很"直"

解 原式 $= \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz\,dy\,dx$

$= \int_0^1\int_0^{1-x} -\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{(1+x+y)^2}\right] dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} -\frac{1}{8} + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x+y)^2} dy\,dx$

$= \int_0^1 -\frac{1}{8}[1-x-0] - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{1+x}\right] dx = \int_0^1 -\frac{3}{8} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x} dx$

$= -\frac{3}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}$

T2 计算 $\iiint\limits_\Omega z\,dV$，其中 Ω 由 $x+y+z=1$ 及坐标平面围成

解：$\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{1-x-y} z\,dz\,dy\,dx = \int_0^1\int_0^{1-x} \frac{1}{2}(1-x-y)^2 dy\,dx$

$= \int_0^1 \frac{1}{6}\left[0 - (x-1)^3\right] dx$

$= \frac{1}{24}$

T3. Ω: $z^2 = x^2+y^2$ 与 $z=2$ 围成. 计算 $\iiint_\Omega z^2 dV = \iint\limits_{B(0,2)} \int_r^2 z^2 dz\,d\sigma = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \frac{1}{3}[8-r^3]\cdot r\,dr\,d\theta$

以z轴放射，$z^2=r^2$

$= 2\pi\cdot\left[\frac{16}{3} - \frac{32}{15}\right] = \frac{32}{5}\pi$

T4: 设 Ω: $z = 2-(x^2+y^2)$ 与 $z=0$ 所围，求解：$\iiint\limits_\Omega \min\{z,1\}\, dx\,dy\,dz$

以z轴放射状，$z=2-r^2$

$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2-z}} \min\{z,1\}\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$

$= \pi\int_0^2 \min\{z,1\}(2-z)\,dz$

$= \pi\left[\int_1^2 (2-z)dz + \int_0^1 z(2-z)\,dz\right]$

$= \pi\left(2 - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{6}\pi$

T5 设 $F(t)=\iiint\limits_{\substack{x^2+y^2\le t^2 \\ 0\le z\le t}} f(x^2+y^2)\,dxdydz$，$f(u)$ 连续可微，求 $F'(t)$

$0\le z\le t \rightarrow$ 又是z轴旋转，基本圆柱体

解：$F(t)=\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$

$=\frac{1}{2}\int_0^t dz\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{t^2}f(r)\,dr$

$=\pi\cdot t\cdot\int_0^{t^2}f(r)\,dr$

求导公式：$F(t)=\int_{b(t)}^{a(t)}f(u,t)\,du$

则 $F'(t)=f(a(t),t)\cdot a'(t)-f(b(t),t)\cdot b'(t)+\int_{b(t)}^{a(t)}f'_t(u,t)\,du$

Remark：也可直接写 $\int_0^t f(r^2)\cdot r\,dr$ 对 t 求导。

T6 设 $f(u)$ 连续，Ω 由 $0\le z\le 1$，$x^2+y^2\le t^2$ 所围，$f(t)=\iiint\limits_\Omega[z^2+f(\sqrt{x^2+y^2})]\,dV$，求 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t^2}$

又是圆柱体

解：$f(t)=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^t[z^2+f(r)]\cdot r\,dr\,d\theta\,dz$

$=2\pi\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2+2\pi\cdot1\cdot\int_0^t f(r)\,r\cdot dr$

$=\frac{\pi}{3}t^2+2\pi\cdot\int_0^t f(r)\,r\cdot dr$ 　　且 $f(0)=0$

则 $\lim\limits_{t\to0^+}\frac{f(t)}{t^2}=\lim\limits_{t\to0^+}\frac{2\pi\cdot t f(t)}{2t}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

T7 设 Ω 由 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 与 $x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ 所定，计算 $\iiint\limits_\Omega z^2\,dxdydz$. （两球夹出，但柱坐标）

解：原式 $=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\sqrt3}{2}R}\int_{R-\sqrt{R^2-r^2}}^{\sqrt{R^2-r^2}}z^2\cdot r\,dz\,dr\,d\theta$

$=\frac{59}{480}\pi$

T8. 求：$z\ge\sqrt{x^2+y^2}\cdot\cot\beta$ 与 $x^2+y^2+(z-a)^2\le a^2$ 所定立体体积，β 是常数.

$z\ge r$

解. 体积 $V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^\beta\int_0^{2a\cos\varphi}r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi$

$=2\pi\cdot\int_0^\beta\frac{8}{3}a^3\cos^3\varphi\sin\varphi\,d\varphi$

$=\frac{4}{3}\pi a^3(1-\cos^4\beta)$

T9 设Ω由 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 与 $z=0$ 所围，将 $\iiint_\Omega f(x^2+y^2)\,dV$ 分别写成球、柱积分

解：球：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^1 f(r^2\sin^2\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\cdot dr\,d\theta\,d\varphi$

柱：$\int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}} f(r^2)\cdot r\cdot dz\,dr\,d\theta$

T10 设Ω由曲面 $x=\sqrt{y-z^2}$，$x=\frac{1}{2}\sqrt{y}$ 与 $y=1$ 所围，计算 $\iiint_\Omega (2+z)\cdot dV$

解 分析积分域情况一.

原式 $=\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{\sqrt{y}}{\cos\theta}}^{\sqrt{y}}\cdot(2-r\sin\theta)\cdot r\cdot dr\,d\theta\,dy$

分析积分域情况二.

原式 $=\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}}\int_0^{\sqrt{y}}\cdot(2-r\sin\theta)\cdot r\cdot dr\,d\theta\,dy+\int_0^1\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{\sqrt{y}}{\cos\theta}}(2-r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\,dy$

$+\int_0^1\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\sqrt{y}}(2-r\sin\theta)\cdot r\,dr\,d\theta\,dy$