2021.12.4. 周六、上午、晴.

§17.1 可微性.

一、可微性与全微分. 已有.

17.3 方向导数与梯度.

定义1. 设$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P_0)$内有定义，l为从P_0出发的射线，$P(x,y,z)$为l上且含于$U(P_0)$内的任一点，ρ表示P与P_0两点间的距离($\rho=\rho(P_0,P)$).

若极限 $\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\Delta_l f}{\rho}$ 存在，则称此极限为f在点P_0沿方向l的方向导数.

记作 $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$，$f_l(P_0)$或$f_l(x_0,y_0,z_0)$.

注：记 $\vec{e_l}=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，称为$\vec{l}$的方向向量

射线方程 $\begin{cases}x=x_0+\rho\cos\alpha,\\ y=y_0+\rho\cos\beta, & 0\le\rho<+\infty\\ z=z_0+\rho\cos\gamma.\end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{f(x_0+\rho\cos\alpha,y_0+\rho\cos\beta,z_0+\rho\cos\gamma)-f(x_0,y_0,z_0)}{\rho}$

注. 若$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$存在，则 $\vec{e_l}=\vec{i}=(1,0,0)$时，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$.
$\vec{e_l}=-\vec{i}=(-1,0,0)$时，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=-\dfrac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}$.

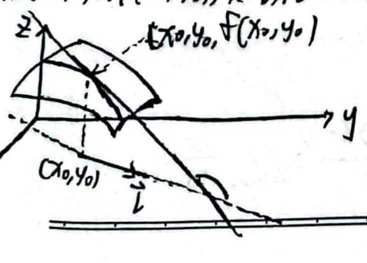
事实上，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=-\dfrac{\partial f}{\partial(-l)}\Big|_{P_0}$ (若f在P_0可微).

性质：$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$存在 $\Leftrightarrow$ f在$P_0(x_0,y_0,z_0)$沿x轴正向和负向的方向导数都存在，且互为相反数.

注(二元函数的方向导数的几何意义).

$z=f(x,y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$ 交线 $\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\ y=y_0+t\cos\beta & (t\ge0)\ \text{柱面}\\ z=f(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\cos\beta) & \text{曲面}\end{cases}$ $z=f(x,y)$

在$(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$处切线对有向直线l的斜率 (单侧导数).



问题：方向导数如何计算.

定理17.6 P_{118}.

若$f(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$可微，则f在点P_0处沿任一方向$\vec{l}$的方向导数都存在且

$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$
$=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$
$=\nabla f(P_0)\cdot\vec{e_l}$ 其中 $\vec{e_l}=\dfrac{\vec{l}}{|\vec{l}|}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

证. 设$P(x,y,z)$为$\vec{l}$上任一点，则

$x-x_0=\Delta x=\rho\cos\alpha$
$y-y_0=\Delta y=\rho\cos\beta$ 由假设f在点P_0可微，故
$z-z_0=\Delta z=\rho\cos\gamma$

$f(P)-f(P_0)=f_x(P_0)\Delta x+f_y(P_0)\Delta y+f_z(P_0)\Delta z+o(\rho)$
$(\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}\to0^+)$.

故 $\dfrac{f(P)-f(P_0)}{\rho}=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma+\dfrac{o(\rho)}{\rho}$

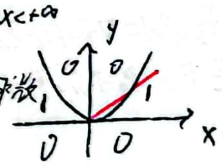
令$\rho\to0^+$得 $f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$ □.

注. 对于$f(x,y)$，$\vec{e_l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$，类似可得 $f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta$.

注. 可微 $\xRightarrow{\text{Th17.6}}$ / $\overset{①}{\not\Longleftarrow}$ 方向导数存在 $\overset{②}{\not\Longrightarrow}$ / $\overset{③}{\not\Longleftarrow}$ 连续.

反例①、②：P_{119} 例12

$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}0<y<x^2,\ -\infty<x<+\infty\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$



$P_0(0,0)$，f在P_0不连续. 即不可微.

$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}=0\ (\forall\vec{l})$

例. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x,y)\ne0\\ 0, & (x,y)=0.\end{cases}$

$P_0(0,0)$，f在P_0不连续 ($y=k\sqrt{x}$).

$\forall$方向 $\vec{l}=(\cos\theta,\sin\theta)$ $\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{(0,0)}=\begin{cases}\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}, & \cos\theta\ne0\\ 0, & \cos\theta=0\end{cases}$

$\lim\limits_{\rho\to0^+}\dfrac{\frac{\rho\cos\theta\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2\cos^2\theta+\rho^4\sin^4\theta}}{\rho}$

反例③. ($f(x)=|x|^{\frac13}$

)

例. $f(x,y)=(x^2+y^2)^{\frac14}$，$P_0(0,0)$.

f在P_0连续，所有$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$都不存在 $+\infty$.

($f(x)=\begin{cases}|x|\sin\frac{1}{|x|}, & x\ne0\\ 0, & x=0\end{cases}$)

例. $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\ne0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$

$P_0(0,0)$. f在P_0连续，所有$\dfrac{\partial f}{\partial l}\Big|_{P_0}$都不存在. 振荡 极限不存在

定义2. 若$f(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$可偏导，则向量$(f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$称为$f$在点$P_0$的梯度，记作 $\nabla f(P_0)=\mathrm{grad}\, f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0),f_z(P_0))$

它的长度(or 模).

$$|\nabla f(P_0)|=|\mathrm{grad}\, f(P_0)|=\sqrt{(f_x(P_0))^2+(f_y(P_0))^2+(f_z(P_0))^2}$$

~~设~~ $u=u(x,y,z)$. $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$.

$$\nabla u=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})$$

注. 定理17.6中方向导数公式可写改写成.

$$f_l(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot \vec{e_l}=|\nabla f(P_0)|\cos\theta,\quad \theta=(\widehat{\nabla f(P_0),\vec{e_l}})$$

当$\theta=0$时，即l与$\nabla f(P_0)$方向一致时，$f_l(P_0)$有max为$|\nabla f(P_0)|$

$=\pi$时，　　相反，……，min为 $|\nabla f(P_0)|$ 是.

注. 方向导数的计算步骤.

设$f(x,y,z)$. l. P_0.

1° 求单位向量 $\vec{e_l}=\frac{l}{|l|}$

2° 若f在P_0可微，则计算 $\nabla f(P_0)=\nabla f|_{P_0}$

$f_l(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\vec{e_l}$

若f在P_0不知是否可微，由定义 $f_l(P_0)=\lim\limits_{\rho\to0^+}\frac{f(P)-f(P_0)}{\rho}$

例1. P119. 设$f(x,y,z)=x+y^2+z^3$, $P_0(1,1,1)$, $l=(2,-2,1)$. 求$f_l(P_0)$.

解: f在P_0可微.

$\nabla f=(1,2y,3z^2)$. $\nabla f(P_0)=(1,2,3)$.

$\vec{e_l}=\frac{l}{|l|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}(2,-2,1)=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3})$.

故 $f_l(P_0)=\nabla f(P_0)\cdot\vec{e_l}=\frac{1}{3}$.

例2. P120例3.

设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^3$. $P_0(2,-1,1)$. 求$\nabla f(P_0)$及其模.

解: $\nabla f=(y^2,2xy+z^3,3yz^2)$.

$\nabla f(P_0)=(1,-3,-3)$

$|\nabla f(P_0)|=\sqrt{1^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{19}$.

§17.4. Taylor公式与极值问题.

一、高阶偏导数.

设$z=f(x,y)$的偏导数$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$关于x,y的偏导数也存在，则称f具有二阶偏导数，记

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial x})=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$.

$\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)$.

} 二阶混合偏导数

$\frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial y})=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$.

类似可定义f的n阶偏导数($n\geq3$).(共2^n个).

注. 既有关于x又有关于y的高阶偏导数称为混合偏导数

如 f_{xy}, f_{yx}, f_{xy^2} 等.

例1. P121

求$z=e^{x+2y}$的所有二阶偏导数和$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}$

解. 设$f(x,y)=e^{x+2y}$. 则$f_x=e^{x+2y}$, $f_y=2e^{x+2y}$

$f_{xx}=e^{x+2y}$, $f_{xy}=2e^{x+2y}$, $f_{yx}=2e^{x+2y}$, $f_{yy}=4e^{x+2y}$

$\frac{\partial^3 z}{\partial y\partial x^2}=2e^{x+2y}$.

问题: 什么条件下 $f_{xy}=f_{yx}$?

例. P122.

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$f_{xy}(0,0)=-1$, $f_{yx}(0,0)=1$, $f_{xy}\neq f_{yx}$

$$f_x=\begin{cases}\frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq0.\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)$
$-2x(x^3y-xy^3)$

$$f_y=\begin{cases}\frac{x(x^4-4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}, & x^2+y^2\neq0\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{\Delta y\to0}\frac{f_x(0,\Delta y)-f_x(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to0}\frac{-\Delta y}{\Delta y}=-1$$

$$f_{yx}(0,0)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f_y(\Delta x,0)-f_y(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1.$$

分析: $f_x(x,y)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$

$$f_{xy}(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)-f_x(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

$$=\lim_{\Delta y\to 0}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\underbrace{[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)]}\overset{\text{记为}}{=}F(\Delta x,\Delta y).$$

Similarly, $f_{yx}(x_0,y_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{1}{\Delta x\Delta y}F(\Delta x,\Delta y)$.

结论: $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)\iff$ 累次极限可交换次序.

定理17.7. P123

若 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续, 则

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

证: 令 $F(\Delta x,\Delta y)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)+f(x_0,y_0)$,

$\varphi(x)=f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)$.

则 $F(\Delta x,\Delta y)=\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)$

由一元函数Lagrange中值定理, 得 $F(\Delta x,\Delta y)=\varphi'(x_0+\theta_1\Delta x)\Delta x$. $(0<\theta_1<1)$

$=[f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)-f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0)]\Delta x$

$\overset{Lag}{=} f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta x\Delta y$ $(0<\theta_2<1)$.

若令 $\psi(y)=f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)$. 则

$F(\Delta x,\Delta y)=\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)$

同理可得 $F(\Delta x,\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)\Delta x\Delta y$. $(0<\theta_3,\theta_4<1)$

故 $f_{xy}(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y)=f_{yx}(x_0+\theta_3\Delta x,y_0+\theta_4\Delta y)$. $(0<\theta_1,\theta_2,\theta_3,\theta_4<1)$

令 $\Delta x\Delta y\to 0$, 由假设 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 都在 (x_0,y_0) 连续.

故 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

注. 定理的条件可以减弱. P134 习题17.18.

1. 设 f_x,f_y 和 f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在, f_{yx} 在点 (x_0,y_0) 连续, 证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在, 且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.
2. 设 f_x,f_y 在点 (x_0,y_0) 的某邻域上存在且在点 (x_0,y_0) 可微, 则有 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

注. 对n元函数, 也有类似结论.

定理 ([数程] 第1卷 P344).

设 $u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in D\subset\mathbb{R}^n$ (区域). u在D中存在所有的k-1阶偏导数和所有k阶混合偏导数. 且它们都在D中连续. 则任一k阶混合偏导数都与求导次序无关.

证明提示: k=2时 即定理17.7.

k>2时, 只要证 $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}\partial x_{i_{n+1}}\cdots\partial x_{i_k}}=\dfrac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_{n+1}}\partial x_{i_n}\cdots\partial x_{i_k}}$

其中 $i_1,i_2,\dots,i_n,i_{n+1},\dots,i_k\in\{1,2,\dots,n\}$.

注. 今后常假定一切导数都连续, 此时k阶偏导数可写作 $\dfrac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1}\partial x_2^{\alpha_2}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}$ (其中 $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$)

(抽象)复合函数的高阶偏导数的计算. "按拆组".

$u=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

引入记号: $f_i'=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ $(1\le i\le n)$.

$f_{ij}''=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}$ $(1\le i,j\le n)$.

例12 P125 例13.

设 $z=f(x,\frac{x}{y})$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解: $\dfrac{\partial z}{\partial x}=f_1'+\dfrac1y f_2'$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{x}{y^2}f_2'$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{11}''+\frac1y f_{12}''+\frac1y\left(f_{21}''+\frac1y f_{22}''\right)=f_{11}''+\frac2y f_{12}''+\frac1{y^2}f_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{12}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)-\frac1{y^2}f_2'+\frac1y f_{22}''\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac1{y^2}f_2'-\frac{x}{y^2}f_{12}''-\frac{x}{y^3}f_{22}''.$$

例. (弦振动方程的达朗贝尔(D'Alembert)解法) 初值问题 (or 称Cauchy问题).

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, & t>0,\ -\infty<x<+\infty. \quad (1)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x), & -\infty<x<+\infty \quad (2)\end{cases}$$

其中未知函数 $u(x,t)$. 常数 $a>0$.

解: 通过自变量变换的方法求解.

引入新的自变量: $\xi=x-at$, $\eta=x+at$. $u\begin{cases}\xi\begin{cases}x\\t\end{cases}\\ \eta\begin{cases}x\\t\end{cases}\end{cases}$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial t}=-a\frac{\partial u}{\partial \xi}+a\frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta\partial \xi}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-4a^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}$.

方程(1)化为 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$ (3).

积分两次得 $u(\xi,\eta)=F(\xi)+G(\eta)$.

其中F,G为任意两个可微函数.

于是方程(1)的通解为 $u(x,t)=F(x-at)+G(x+at)$. (4)

将(4)代入初值条件(2),得

$u|_{t=0}=F(x)+G(x)=\varphi(x)$. (5)

$\frac{\partial u}{\partial t}\big|_{t=0}=a(-F'(x)+G'(x))=\psi(x)$.

后者积分得 $\left(\int_{x_0}^{x}\cdots dx\right)$

$a(-F(x)+G(x))+C=\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau$ (6).

其中 x_0 是任意一点, C为常数.

联立(5),(6)解得 $\begin{cases}F(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau+\frac{C}{2a},\\ G(x)=\frac{1}{2}\varphi(x)+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\tau)d\tau-\frac{C}{2a}.\end{cases}$

代入(4),得初值问题(1),(2)的解.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)d\tau$$

(称为D'Alembert公式)

例. 设 $z=f(x,y)$ 连续可微, 且 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}$.

证明:存在一元函数 φ, 满足 $f(x,y)=\varphi(x+y)$.

证: 令 $\begin{cases}x+y=\xi\\ y=\eta\end{cases}$, 即 $\begin{cases}x=\xi-\eta\\ y=\eta\end{cases}$. $z<\begin{matrix}x<\begin{matrix}\xi\\ \eta\end{matrix}\\ y-\eta\end{matrix}$

则 $z=f(\xi-\eta,\eta)$

由条件 $\frac{\partial z}{\partial \eta}=\frac{\partial f}{\partial x}(-1)+\frac{\partial f}{\partial y}=0$

故 $z=\varphi(\xi)$, 其中 φ 为任一连续可微的函数.

于是 $z=f(x,y)=\varphi(x+y)$.

例 设A,B,C为常数, $B^2-AC>0$, $A\neq 0$, $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 试证明必存在非奇异线性变换 $\xi=\lambda_1 x+y$, $\eta=\lambda_2 x+y$, (λ_1,λ_2 为常数), 将方程 $A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$ 化成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$.

解: $z<\begin{matrix}\xi<\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\\ \eta<\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}\end{matrix}$ $\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda_1\frac{\partial u}{\partial \xi}+\lambda_2\frac{\partial u}{\partial \eta}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lambda_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\lambda_1\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\lambda_1\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+\lambda_2\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}.$$

代入所给方程,得

$$(A\lambda_1^2+2B\lambda_1+C)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+2[\lambda_1\lambda_2A+(\lambda_1+\lambda_2)B+C]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}+(A\lambda_2^2+2B\lambda_2+C)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}=0.$$

由于 $B^2-AC>0$, $A\neq 0$, 故 $A\lambda^2+2B\lambda+C=0$ 必有两个不相等的实根 λ_1,λ_2, 取此 λ_1 与 λ_2 代入变换后的方程

$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{2B}{A}$, $\lambda_1\lambda_2=\frac{C}{A}$ $\left[2\cdot\frac{2AC-2B^2}{A}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$

$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial \xi\partial \eta}=0$. 变换的雅可比行列式 $\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1\\ \lambda_2 & 1\end{vmatrix}^2=(\lambda_1-\lambda_2)^2$

$=(\lambda_1+\lambda_2)^2-4\lambda_1\lambda_2=\frac{4B^2-4AC}{A^2}\neq 0$, 故它是非奇异线性变换.

注 若 $B^2-AC>0$, $C\neq 0$, 同理可设

令 $\xi=x+\lambda_1 y$, $\eta=x+\lambda_2 y$.

例. 解方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$, 其中 $z=z(x,y)$.

提示: 令 $z=u(x,y)e^{x+y}$

$\frac{\partial z}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)e^{x+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+u\right)e^{x+y}$

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial x}+u\right)e^{x+y}$

代入方程 $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$ $u=F(x)+G(y)$. F,G为任意可微函数

例 设 ~~z=~~ $u(x,y)e^{ax+by}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$, 试确定常数a,b, s.t. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

答 $a=1, b=1$.

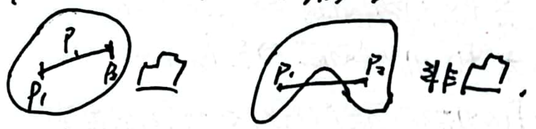
例 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-\frac{1}{x^2y^2}}}{e^{\frac{1}{x^4}}+e^{\frac{1}{y^4}}}, & xy\neq 0\\ 0, & xy=0\end{cases}$

在全平面处处存在任意阶偏导数，但在 $(0,0)$ 处不连续.

二、中值定理和 Taylor 公式.

定义 (凸区域).

若区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上任意两点的连线都含于 D，则称 D 为凸区域. 即 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D,\forall\lambda\in[0,1]$ 有 $P(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in D$



定理17.8 (中值定理).

设 $f(x,y)$ 在凸区域 $D\subset\mathbb{R}^2$ 上连续，在 $\mathrm{int}D$ 上可微.
则 $\forall P(a,b),Q(a+h,b+k)\in\mathrm{int}D$，$\exists\theta\in(0,1)$, s.t.

$$f(a+h,b+k)-f(a,b)=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k. \quad (8)$$

(8)式称为二元函数 (在凸域上) 的中值公式).

证. 作辅助函数 $\Phi(t)=f(a+th,b+tk)$，$t\in[0,1]$.
由定理条件知 $\Phi(t)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可微.
根据一元函数的 Lagrange 中值定理，$\exists\theta\in(0,1)$, s.t.
$\Phi(1)-\Phi(0)=\Phi'(\theta)$. 即 (8)式成立.

注. 若 D 是闭区域，且 $\forall P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)\in D,\forall\lambda\in(0,1)$.
有 $P(x_1+\lambda(x_2-x_1),y_1+\lambda(y_2-y_1))\in\underline{\underline{\mathrm{int}D}}$，
则对 D 上连续，$\mathrm{int}D$ 内可微的函数，只要 $P,Q\in D$.
则 $\exists\theta\in(0,1)$，也 s.t. (8)式成立.

如 $D=\{(x,y)\mid(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\le r^2\}$.
但 $D=[a,b]\times[c,d]$ 不成立

推论. 若 $f(x,y)$ 在区域 D 上存在偏导数，且 $f_x=f_y\equiv 0$.
则 f 在 D 上为常量函数.

偏导数连续 $\Rightarrow$ 可微
由 Th 17.8 可证.

定理17.9 (Taylor 定理). P_{127}.

若 $f(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 内有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数，则 $\forall P(x_0+h,y_0+k)\in U(P_0)$，$\exists\theta\in(0,1)$, s.t.

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0,y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2f(x_0,y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^nf(x_0,y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k), \quad (11).$$

其中 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0,y_0)=\sum\limits_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0,y_0)h^ik^{m-i}$,

(11)式称 $f(x,y)$ 在点 P_0 的 n 阶 Taylor 公式.

注 $n=0$ 时，(11) 即中值公式(8).

证：作辅助函数 $\Phi(t)=f(x_0+th,y_0+tk)$，$t\in[0,1]$.

由定理的假设条件知 $\Phi(t)$ 在 $[0,1]$ 上满足一元函数 Taylor 定理的条件. 故

$$\Phi(1)=\Phi(0)+\frac{\Phi'(0)}{1!}+\frac{\Phi''(0)}{2!}+\cdots+\frac{\Phi^{(n)}(0)}{n!}+\frac{\Phi^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \quad (12).\quad 0<\theta<1$$

另一方面，有 $\Phi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0+th,y_0+tk)$ $(m=1,2,\cdots,n+1)$. ☆

$$\Phi^{(m)}(0)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0,y_0)\quad(m=1,2,\cdots,n). \quad (13)$$

$$\Phi^{(n+1)}(\theta)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta h,y_0+\theta k). \quad (14).$$

代入(12)式即得(11)式. □

☆ 利用数学归纳法及复合函数的求导法则可证☆式.

$m=1$ 时 $\Phi'(t)=hf_x(x_0+th,y_0+tk)+kf_y(x_0+th,y_0+tk)$.

$$=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0+th,y_0+tk),\ 成立.$$

其次，设 $\Phi^{(m)}(t)=\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^mf(x_0+th,y_0+tk)$ 成立.

$$=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0+th,y_0+tk)h^ik^{m-i}$$

则 $\Phi^{(m+1)}(t)=\left(\Phi^{(m)}(t)\right)'$

$$=\frac{d}{dt}\left(\sum_{i=0}^{m}C_m^i\frac{\partial^m}{\partial x^i\partial y^{m-i}}f(x_0+th,y_0+tk)h^ik^{m-i}\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{m}C_m^i\left[\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{i+1}\partial y^{m-i}}f(x_0+th,y_0+tk)h^{i+1}k^{m-i}+\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^i\partial y^{m+1-i}}f(x_0+th,y_0+tk)h^ik^{m+1-i}\right]$$

$$=\sum_{i=0}^{m-1}C_m^i\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{i+1}\partial y^{m-i}}f\cdot h^{i+1}k^{m-i}+C_m^m\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}f\cdot h^{m+1}$$

$$\cancel{+\sum_{i=1}^{m}C_m^i\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^i\partial y^{m+1-i}}f\cdot h^ik^{m+1-i}+C_m^0\frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}}f}\cdot k^{m+1}$$

Date.
No.

$$= \sum_{l=1}^{m} C_m^{l-1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^l \partial y^{m+1-l}} f \cdot h^l \cdot k^{m+1-l}$$

$$+ C_{m+1}^{m+1} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} f \cdot h^{m+1}$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} C_m^{l} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^l \partial y^{m+1-l}} f \cdot h^l \cdot k^{m+1-l}$$

$$+ C_{m+1}^{0} \frac{\partial^{m+1}}{\partial y^{m+1}} f\, k^{m+1}$$

$$= \sum_{l=0}^{m+1} C_{m+1}^{l} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^l \partial y^{m+1-l}} f \cdot h^l k^{m+1-l}$$

$C_m^l + C_m^{l-1} = C_{m+1}^l$ （无球不选 / 球选取）

$$= \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{m+1} f(x_0+th, y_0+tk).$$

注.（带Peano型余项的Taylor公式）P127.

若 $f(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 内有直至n阶连续偏导数，则

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f(x_0,y_0) + o(\rho^n)$$

$$(\rho = \sqrt{h^2+k^2} \to 0)$$

例3 P127 例5

求 $f(x,y)=x^y$ 在点 $(1,4)$ 的二阶Taylor公式. $f_{xy} = x^{y-1} + yx^{y-1}\ln x = 1$

$f(1,4)=1$, $f_x(1,4) = yx^{y-1} = 4$, $f_y = x^y \ln x = 0$, $f_{xx} = 12$, $f_{yy} = 0$

$$f(x,y) = f(1,4) + 4\cdot(x-1) + 0(y-4) + \frac{1}{2!}\left(12(x-1)^2 + 2\cdot 1\cdot(x-1)(y-4) + 0\cdot(y-4)^2\right) + o(\rho^2). \quad (\rho = \sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2} \to 0)$$

注. 近似计算 $(1.08)^{3.96}$

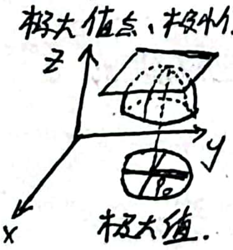
$$(1.08)^{3.96} \approx 1 + 4\cdot(0.08) + 6\times(0.08)^2 + (0.08)(-0.04)$$

$$= 1.3552$$ 精确值为 1.3567307…

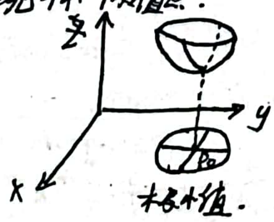
三、极值问题.

定义1. 设 $f(P)=f(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 内有定义，若 $\forall P(x,y) \in U(P_0)$，有 $f(P) \le f(P_0)$（或 $f(P) \ge f(P_0)$）.

则称 f 在点 P_0 取得极大（or 极小）值，点 P_0 称为 f 的极大（or 极小）值点. 极大值、极小值统称极值. 极大值点、极小值点统称极值点.



极大值.



极小值.

例4. $f(x,y) = 2x^2+y^2$, $(0,0)$ 极小值点.

$g(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$, $(0,0)$ 极大值点

$h(x,y) = xy$, $(0,0)$ 不是极值点.

定理17.10（极值必要条件，类似一元函数极值的Fermat定理）

若 $f(x,y)$ 在极值点 $P_0(x_0,y_0)$ 可偏导，则 $\begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \\ f_y(x_0,y_0)=0 \end{cases}$

（即 $\nabla f(x_0,y_0) = 0$）.

注：$x=x_0$ 为 $f(x,y_0)$ 的极值点 $\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=0$

$y=y_0$ 为 $f(x_0,y)$ 的极值点 $\Rightarrow f_y(x_0,y_0)=0$.

若 $z=f(x,y)$ 在极值点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则曲面在点 $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处存在切平面 $z=z_0$.

（法向量 $=(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1) = (0,0,-1)$）.

注：若点 (x_0,y_0) 满足(16)，则称 P_0 为 f 的一个驻点.（或临界点，稳定点）.

问题：极值的充分条件？

定义. 设 $f(x,y)$ 有二阶连续偏导数，记 $H_f(P_0) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{P_0}$ 称为 f 在 P_0 的 Hesse 矩阵.

一般地，$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$

$H_f(P_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{P_0}$（$n\times n$ 实对称矩阵）.

定理17.11（极值充分条件）.

设 $f(x,y)$ 在 $U(P_0(x_0,y_0))$ 内具有二阶连续偏导数，P_0 是 f 的稳定点. 则

(i) $H_f(P_0)$ 正定 $\Rightarrow$ 极小值,

(ii) $H_f(P_0)$ 负定 $\Rightarrow$ 极大值,

(iii) $H_f(P_0)$ 不定 $\Rightarrow$ 不取极值.

(iv) $\det(H_f(P_0))=0 \Rightarrow$ 需进一步讨论 ← 非负 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$

规范标准形

$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

不定 $\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ ← 鞍点

证：由 f 在 P_0 的带 Peano 余项的二阶Taylor公式，及 $f_x(P_0)=f_y(P_0)=0$

有 $f(x,y)-f(x_0,y_0) = \underset{0}{f_x(P_0)}\Delta x + \underset{0}{f_y(P_0)}\Delta y + \frac{1}{2}(\Delta x\ \Delta y) H_f(P_0) \begin{pmatrix}\Delta x \\ \Delta y\end{pmatrix} + o((\Delta x)^2 + \cdots)$ 二次型.

$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2} \to 0$

$\Phi(u,v)=\frac{Q(\Delta x,\Delta y)}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=(u,v)H_f(P_0)(u,v)^T$, $u=\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$, $v=\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$, $u^2+v^2=1$, 故有最小值 $2q>0$, 又 $(u,v)\neq(0,0)$, 故 $q>0$.

i) 若 $H_f(P_0)$ 正定，则对任何 $(\Delta x,\Delta y)\neq(0,0)$，恒有二次型 $Q(\Delta x,\Delta y)=(\Delta x,\Delta y)H_f(P_0)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}>0$.

存在 $q>0$ (与 $\Delta x,\Delta y$ 无关), s.t. $Q(\Delta x,\Delta y)\ge 2q((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$.

对充分小的 $U(P_0)$，只要 $(x,y)\in U(P_0)$，就有

$f(x,y)-f(x_0,y_0)\ge q((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)+o((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)$

$=[q+o(1)]((\Delta x)^2+(\Delta y)^2)\ge 0$

即 f 在 P_0 取极小值.

ii) 若 $H_f(P_0)$ 负定，同理可证 f 在 P_0 取极大值.

iii) 当 $H_f(P_0)$ 不定时，f 在 P_0 不取极值.

假设不然，不妨设 f 在 P_0 取极大值，则沿任何过 P_0 的直线 $x=x_0+t\Delta x$, $y=y_0+t\Delta y$,

$f(x,y)=f(x_0+t\Delta x,y_0+t\Delta y)\triangleq\varphi(t)$ 在 $t=0$ 取极大值.

由一元函数取极值的充分条件知 $\varphi''(0)<0$ (否则由 $\varphi''(0)>0$ 知 $\varphi(t)$ 取极小值，矛盾). 而 $\varphi'(t)=f_x\Delta x+f_y\Delta y$

$\varphi''(t)=f_{xx}(\Delta x)^2+2f_{xy}\Delta x\Delta y+f_{yy}(\Delta y)^2$,

$\varphi''(0)=(\Delta x,\Delta y)H_f(P_0)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}\le 0$ 即 $H_f(P_0)$ 必须是半负定的，

这与 $H_f(P_0)$ 是不定矩阵矛盾.

同理，若 f 在 P_0 取极小值，$H_f(P_0)$ 必须是半正定的，矛盾.

故当 $H_f(P_0)$ 是不定矩阵时，一定不取极值.

iv) 例如 $f(x,y)=x^4+y^4$ $(0,0)$ 是极小值点.

$f(x,y)=-x^4-y^4$, $(0,0)$ 是极大值点.

$f(x,y)=x^3+y^3$, $(0,0)$ 不是极值点. □

注. 设实对称阵 $A_{n\times n}=(a_{ij})_{n\times n}$.

A正定 $\overset{def}{\iff}$ $\forall x\neq 0$, 有 $x^TAx>0$. $x=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$

A负定 $\overset{def}{\iff}$ - - -, $x^TAx<0$.

(A负定 $\iff$ $-A$正定)

注 A正定 $\iff$ A的n个特征值全为正数

$\iff$ A的顺序主子式全为正的, 即 $a_{11}>0$, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\cdots$, $|A|>0$.

A负定 $\iff$ A的n个特征值全为负的

$a_{11}<0$, $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}>0$, $\cdots$, $(-1)^n|A|>0$.

A不定 $\iff$ A的n个特征值都不为0, 且有正有负

$\det A=|A|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\neq 0$.

例5. 求 $f(x,y)=x^2+5y^2-6x+10y+6$ 的极值.

解: f 在 $\mathbb{R}^2$ 上有二阶连续偏导数.

由 $\begin{cases}f_x=2x-6=0\\ f_y=10y+10=0\end{cases}$ 解得 f 的稳定点 $P_0(3,-1)$.

$f_{xx}=2$, $f_{xy}=0$, $f_{yy}=10$, $H_f(P_0)=\begin{pmatrix}2&0\\0&10\end{pmatrix}$ 正定,

故 f 在点 P_0 取得极小值 $f(P_0)=-8$.

注. $f(x,y)=(x-3)^2+5(y+1)^2-8$

当且仅当 $x=3$, $y=-1$ 时, f 有最小值 -8.

例6. P130 例19.

讨论 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$ 在原点是否取极值.

解. $f(x,y)=y^2-x^2y-2x^2y+2x^4$

$f_x=-6xy+8x^3$

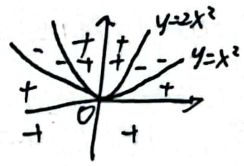
$f_y=2y-3x^2$ $(0,0)$满足极值必要条件

$f_{xx}=-6y+24x^2$, $f_{xy}=-6x$, $f_{yy}=2$

$P_0(0,0)$ 是稳定点, 且 $(f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2)(P_0)=0=|H_f(P_0)|$

当 $x^2<y<2x^2$, $f(x,y)<0$,

$y>2x^2$ 或 $y<x^2$ 时, $f(x,y)>0$.



故 f 在 $P_0(0,0)$ 不取极值.

注. 根据定理17.11(iv)无法判断.

在直线 $y=kx$ $(k\neq 0)$ 上,

$f(x,kx)=x^2(k-x)(k-2x)>0$ (当$|x|>0$充分小)

在直线 $y=0$ 上

$f(x,0)=2x^4>0$ (当$|x|>0$充分小).

在直线 $x=0$ 上

$f(0,y)=y^2>0$ (当$|y|>0$充分小).

即沿过 $P_0(0,0)$ 的任何直线上, f 都取极小值.

有界闭区域 D 上连续函数 $f(x,y)$ 的 max, min 问题.

1° 求出 f 在 D 内的所有稳定点、偏导数不存在的点上的 f 的值.

2° 求出 f 在边界 ∂D 上的 max, min

方法一. 化为一元函数问题

方法二. 利用条件极值 $\begin{cases}f(x,y)\\ \partial D\text{的方程}\end{cases}$ 见§18.4

3° 比较1°,2°, 其中最大(小)值即为 f 在 D 上的最大(小)值.

例17. 求函数 $f(x,y)=x^2+2x^2y+y^2$ 在 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$ 上的最大值和最小值.

解: $f(x,y)$ 在 D 上具有二阶连续偏导数.

(i) 先求 $f(x,y)$ 在 D 内的所有稳定点及其函数值.

令 $\begin{cases} f_x = 2x+4xy=0 \\ f_y = 2x^2+2y=0 \end{cases}$ 得稳定点 $(0,0)$, $(\frac{1}{\sqrt2},-\frac12)$ $(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac12)$. ($x-2x^3=0$)

$f(0,0)=0$, $f(\frac{1}{\sqrt2},-\frac12)=\frac14=f(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac12)$.

(ii) 再求 $f(x,y)$ 在 ∂D 上的最值.

将 $\partial D: x^2+y^2=1$ 代入 $f(x,y)$ 得

$G(y)=1+2y-2y^3,\ y\in[-1,1]$ $\quad G'(y)=2-6y^2$

令 $G'(y)=0$ 得 $y=\pm\frac{1}{\sqrt3}\in(-1,1)$ $\quad G(-1)=1,\ G(1)=1.$

$G(\frac{1}{\sqrt3})=1+\frac{2\sqrt3}{3}-2\cdot\frac13\cdot\frac{\sqrt3}{3}=1+\frac{4\sqrt3}{9}$

$G(-\frac{1}{\sqrt3})=1-\frac{2\sqrt3}{3}+2\cdot\frac13\cdot\frac{\sqrt3}{3}=1-\frac{4\sqrt3}{9}$.

故 $\max\limits_{\partial D} f(x,y)=G(\frac{1}{\sqrt3})=1+\frac49\sqrt3$.

$\min\limits_{\partial D} f(x,y)=G(-\frac{1}{\sqrt3})=1-\frac49\sqrt3$.

比较(i),(ii) 得 f 在 D 上 max 为 $G(\frac{1}{\sqrt3})=f(\pm\sqrt{\frac23},\frac{1}{\sqrt3})=1+\frac49\sqrt3$

$\min\limits_{D} f(x,y)=f(0,0)=0.$

例18. P131 例11 (最小二乘法问题).

设点列 $\{(x_i,y_i)\mid i=1,2,\dots,n\}$, 试确定一直线, s.t. 与这 n 个点的偏差平方和最小(最小二乘法).

解: 设所求直线方程为 $y=ax+b$.

现要确定 a,b. s.t. $f(a,b)=\sum\limits_{i=1}^n(ax_i+b-y_i)^2$ 为最小.

不妨设 x_i 不全相等, 令 $\begin{cases} f_a=2\sum\limits_{i=1}^n x_i(ax_i+b-y_i)=0 \\ f_b=2\sum\limits_{i=1}^n(ax_i+b-y_i)=0 \end{cases}$

整理得 $\begin{cases} a\sum x_i^2+b\sum x_i=\sum\limits_{i=1}^n x_iy_i \\ a\sum\limits_{i=1}^n x_i+nb=\sum\limits_{i=1}^n y_i \end{cases}$

解得 $f(a,b)$ 的稳定点 $(\bar a,\bar b)$:

$$\bar a=\frac{n\sum x_iy_i-(\sum x_i)(\sum y_i)}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}$$

$$\bar b=\frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i)-(\sum x_iy_i)(\sum x_i)}{n\sum x_i^2-(\sum x_i)^2}$$

$A=f_{aa}=2\sum x_i^2>0$ $\quad D=AC-B^2=4n\sum x_i^2-4(\sum x_i)^2>0$

$B=f_{ab}=2\sum x_i$ $\quad$ ($x_1,x_2,\dots,x_n$ 不全相等).

$C=f_{bb}=2n$ $\quad (1,1,1,\dots,1)\cdot(x_1,x_2,\dots,x_n)$

即 $H_f(\bar a,\bar b)=\begin{pmatrix}A & B\\ B & C\end{pmatrix}$ 正定.

故 $f(x,y)$ 在 $(\bar a,\bar b)$ 取极小值,

由实际问题知这极小值即为最小值.

定理 (Cauchy不等式)

设 $a_i,b_i\in\mathbb{R}\ (i=1,2,\dots,n)$, 则 $(\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i)^2\le(\sum\limits_{i=1}^n a_i^2)(\sum\limits_{i=1}^n b_i^2)$

其中等号成立当且仅当 $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ 与 $(b_1,b_2,\dots,b_n)$ 成比例

证: 设 $\varphi(t)=\sum\limits_{i=1}^n(ta_i+b_i)^2$
$=(\sum a_i^2)t^2+2(\sum a_ib_i)t+\sum b_i^2,\ t\in\mathbb{R}$

则 $\varphi(t)\ge0$, 故 $\Delta=4(\sum a_ib_i)^2-4(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)\le0$

整理即可. 当且仅当 $ta_i+b_i=0\ (i=1,2,\dots,n)$ 时 $\varphi(t)$ 有 min 0.

此时 $(\sum a_ib_i)^2=(\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$ 成立.

例18中. $(\sum x_i\cdot1)^2<(\sum x_i^2)\cdot(\sum 1)$

多元函数的极值有两个观念值得澄清:

(一) 假设在过点 P_0 的每一条直线上 f 在 P_0 取极小值. 问 能否断言 f 在 P_0 为极小值?

否. 例如 $f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$. $P_0(0,0)$.

(二) 一元函数的极大值与极小值总是交替出现, 多元函数则不然. 甚至只有一种极值, 无穷多个.

例 [华] 例6.3.9.

证明: 函数 $z=f(x,y)=(1+e^y)\cos x-ye^y$ 有无穷多个极大值, 但无极小值.

证: 令 $\begin{cases} f_x=-(1+e^y)\sin x=0 \\ f_y=(\cos x-1-y)e^y=0 \end{cases}$

得无穷多个稳定点 $(x_n,y_n)=(n\pi,\cos n\pi-1)$ $n\in\mathbb{Z}$.

$n=2k$ 为偶数时 $(x_n,y_n)=(2k\pi,0)$ 上

$\Delta=[f_{xx}f_{yy}-f_{xy}^2]_{(x_n,y_n)}$

$=[\underbrace{(1+e^y)}_{2}\underbrace{(-\cos x)}_{-1}\cdot\underbrace{(\cos x-2-y)}_{-1}e^y-(e^y\sin x)^2]_{(x_n,y_n)}$

$=2>0$

$f_{xx}(x_n,y_n)=(1+e^y)(-\cos x)]_{(x_n,y_n)}=-2<0$

故 f 在 $(2k\pi,0)$ $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ 上取极大值.

$n=2k-1$ 为奇数时 $(x_n,y_n)=((2k-1)\pi,-2)$ 上.

$\Delta=(1+e^{-2})\cdot1\cdot[-1-2-(-2)]e^{-2}=-(1+e^{-2})e^{-2}<0$

$f_{xx}(x_n,y_n)=1+e^{-2}>0$

故 f 在 $((2k-1)\pi,-2)$ $k=0,\pm1,\pm2,\dots$ 上不取极值.

总之 f 有无穷多个极大值而无极小值