对于无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$，当 $\{a_n\}$ 的通项最终不能保持不变号时，可用如下结果：

推论2

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛

证要：由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

不妨设 $a_n > -1\ (\forall n)$，由于

$\frac{1}{2}a_n^2 \le 2[a_n - \ln(1+a_n)] \le \frac{3}{2}a_n^2$，$n \gg 1$，$O(x-\ln(1+x)) = O(x^2)$

故 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛 $\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}[a_n - \ln(1+a_n)]$ 收敛

$\xLeftrightarrow{\sum_{n=1}^{\infty} a_n 收敛} \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+a_n)$ 收敛

$\Longleftrightarrow \prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 收敛

推论 $2\frac{1}{2}$

如果 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散，那么 $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n) = 0$

注：当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 都发散时，$\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 还可能是收敛的，

例如：$\sum_{0}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$

定义 9.5.2

对 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$，如果 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 绝对收敛，那么称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 绝对收敛

立即有：绝对收敛的无穷乘积是收敛的

定理 9.5.3

设 $a_n > -1\ (\forall n)$，那么下列三条等价：

(a) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+a_n)$ 绝对收敛

(b) $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|a_n|)$ 收敛

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛

证要：在 $a_n \to 0\ (n\to\infty)$ 下，有

$$\frac{1}{2}|a_n| \le \ln(1+|a_n|) \le |\ln(1+a_n)| \le |a_n|,\quad n \gg 1$$

9.1 数项级数的收敛性

定理 9.1.1 (Cauchy 准则)

$\sum_{1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是

$\forall \varepsilon>0, \exists N>0, \forall n>N, \forall p\geq 1,$

总有 $\left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right|<\varepsilon$

注: $\sum u_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{p\in N_+} \left|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right| = 0$

推论: 若 $\sum u_n$ 收敛, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

定理 9.1.2 (线性运算法则)

若 $\sum u_n$ 与 $\sum v_n$ 都收敛, k为常数, 则 $\sum(u_n+kv_n)$ 也收敛, 且

$\sum(u_n+kv_n) = \sum u_n + k\sum v_n$

定理 9.1.3

去掉, 增加或改变级数的有限项, 不改变级数的敛散性

定理 9.1.4

在收敛级数的项间任意加括号, 既不改变其收敛性, 也不改变它的和.

证要: 设有收敛级数 $\sum_{1}^{\infty} a_n$, 其加括号后变为 $\sum_{1}^{\infty} u_k$, 两个级数关系如下:

$$\sum_{1}^{\infty} u_k = \underbrace{(a_1+\cdots+a_{n_1})}_{u_1} + \underbrace{(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})}_{u_2} + \cdots + \underbrace{(a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k})}_{u_k} + \cdots$$

令 $\sigma_n := \sum_{i=1}^{n} a_i$, $S_k := \sum_{j=1}^{k} u_k$, 则

$S_k = \sigma_{n_k}$

从而 $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = \lim\limits_{k\to\infty} \sigma_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{1}^{\infty} a_n$

9.2 数列的上极限与下极限

定义 9.2.1

设有数列 $\{x_n\}$，如果 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in \mathbb{R},$$

即 $\forall \varepsilon>0$，$(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)$ 内含有 $\{x_n\}$ 的无限多项，

则称 ξ 为 $\{x_n\}$ 的一个极限点，或称聚点

注：对于数集 $A\subseteq\mathbb{R}$，也可定义聚点概念：

若 $\exists\, \xi\in\mathbb{R}$，使得

$$\forall \varepsilon>0,\quad A\cap(\xi-\varepsilon, \xi+\varepsilon)\setminus\{\xi\}\neq\varnothing,$$

那么称 ξ 为 A 的一个聚点，也称极限点

注意，数列的聚点与数列作为数集的聚点是有区别的，记 $A:=\{x_n \mid n\in\mathbb{N}_+\}$，

那么 A 的聚点必是 $\{x_n\}$ 的聚点，但反之不一定真.

定理 9.2.1

有界数列 $\{x_n\}$ 至少有一个聚点，且存在最小聚点与最大聚点.

证要：由 $\{x_n\}$ 有界，存在有界闭区间 $[a_0, b_0]$ 使 $\{x_n\}\subseteq[a_0,b_0]$

因而 $[a_0,b_0]$ 含有 $\{x_n\}$ 的无限多项，而 $(b_0,+\infty)$ 至多含 $\{x_n\}$ 有限项.

令
$$[a_1,b_1]:=\begin{cases}\left[a_0, \frac{a_0+b_0}{2}\right], & \text{当}\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\text{含有}\{x_n\}\text{有限项时}\\ \left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right], & \text{当}\left[\frac{a_0+b_0}{2}, b_0\right]\text{含有}\{x_n\}\text{的无限项时}\end{cases}$$

那么 $[a_1,b_1]$ 含有 $\{x_n\}$ 的无限多项，而 $(b_1,+\infty)$ 至多含 $\{x_n\}$ 有限项

无限地应用这一推导模式，就可得到区间套：

$[a_0,b_0]\supseteq[a_1,b_1]\supseteq\cdots\supseteq[a_k,b_k]\supseteq\cdots$，$b_k-a_k=\frac{1}{2^k}(b_0-a_0)\to0\ (k\to\infty)$

使得每个 $[a_k,b_k]$ 都含有 $\{x_n\}$ 的无限多项，而 $(b_k,+\infty)$ 至多含 $\{x_n\}$ 有限项

定义 9.2.2

有界数列 $\{x_n\}$ 的最小聚点与最大聚点分别称为它的下极限与上极限，并

相应地记作 $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ 与 $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

定理 9.2.2

设 $\{x_n\}$ 为有界数列，那么

(a) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n \geq c \iff \forall \varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall n>N, u_n > c-\varepsilon.$

(b) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n \leq c \iff \forall \varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall n>N, u_n < c+\varepsilon$

(c) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n$，并且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n \iff \lim\limits_{n\to\infty} u_n \exists$

(d) $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-u_n) = -\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} (-u_n) = -\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} u_n$

定理 9.2.3

对有界数列 $\{x_n\}$，有

(1) $\underline{A} = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \iff \forall \varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall n>N, x_n > \underline{A}-\varepsilon$，并且

$\exists \{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ 使 $\forall k\geq 1$，$x_{n_k} < \underline{A}+\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0$，$\{n\in\mathbb{N} \mid x_n < \underline{A}-\varepsilon\}$ 是有限集，

而 $\{n\in\mathbb{N} \mid x_n < \underline{A}+\varepsilon\}$ 是无限集

(2) $\bar{A} = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n \iff \forall \varepsilon>0, \exists N\geq 0, \forall n>N, x_n < \bar{A}+\varepsilon$，并且

$\exists \{x_{n_k}\} \subseteq \{x_n\}$ 使 $\forall k\geq 1$，$x_{n_k} > \bar{A}-\varepsilon$

$\iff \forall \varepsilon>0$，$\{n\in\mathbb{N} \mid x_n > \bar{A}+\varepsilon\}$ 是有限集，

而 $\{n\in\mathbb{N} \mid x_n > \bar{A}-\varepsilon\}$ 是无限集

定理 9.2.4

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是有界数列，那么

(a) $a_n \leq b_n \ (\forall n) \Rightarrow \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leq \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n \leq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} b_n$

(b) $$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n &\leq \underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n+b_n) \\ &\leq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \\ &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n+b_n) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n\end{aligned}$$

(c) 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \exists$，则

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n,$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} (a_n+b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n.$$

定理 9.2.5

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 是有界数列，且 $a_n\geq 0, b_n\geq 0 \ (\forall n>>1)$，那么

(a) $$\begin{aligned}\underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \underline{\lim_{n\to\infty}} b_n &\leq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_nb_n \leq \underline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n \\ &\leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_nb_n \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} a_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} b_n\end{aligned}$$

(b)若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ∃，则

$$\varliminf_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \varliminf_{n\to\infty} b_n,$$

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_nb_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \varlimsup_{n\to\infty} b_n$$

(c)若 $\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n > 0$，则

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varliminf\limits_{n\to\infty} a_n}$$

(d)若 $\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n > 0$，且 $a_n > 0$ $(\forall n >> 1)$，则

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n}$$

定理 9.2.6

设 $\{u_n\}$ 有界，那么

(a) $\varliminf\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{k\geq n} u_k$

(b) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} u_k$

定义 9.2.1′

若 $\{x_n\}$ 有子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$，

则称 ξ 为 $\{x_n\}$ 的一个极限点或聚点

命题 9.2.7

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n \iff \lim_{n\to\infty} x_n = \xi \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

9.3 正项级数

定义 9.3.1

设有级数 $\sum u_n$，如果所有 $u_n \geq 0$，则称 $\sum u_n$ 是正项级数.

定理 9.3.1（有界原则）

正项级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：部分和列 $\{S_n\}$ 有上界

定理 9.3.2

设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 都是正项级数，适合 $\exists c>0$ 使得 $u_n \leq c v_n$ $(n>>1)$，那么

(1) $\sum v_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 收敛

(2) $\sum u_n$ 发散 $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ 发散

推论 1

设有正项级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$，如果 $0 < \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$，

那么 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 同敛散

推论 2

设有正项级数 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$，那么

(1) 若 $0 \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} < +\infty$，则 $\sum v_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 $0 < \varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} \leq +\infty$，则 $\sum u_n$ 收敛 $\Longrightarrow$ $\sum v_n$ 收敛

定理 9.3.3（比式判别法（d'Alembert））

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) 若 $\exists q<1$ 和 $N>0$，使 $\forall n>N$，$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$，则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 $\exists N>0$，$\forall n>N$，$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$，则 $\sum u_n$ 发散

推论（极限形式的比式判别法）

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 收敛

(2) $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ $\Longrightarrow$ $\sum u_n$ 发散

注：当 $\varliminf\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \leq \varlimsup\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ 时，$\sum u_n$ 的比式判别法失效，

例 $\sum \frac{1}{n^2}$，$\sum \frac{1}{n}$.

定理 9.3.4（根式判别法（Cauchy））

Date.　　Page.

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) 若 $\exists q<1$ 和 $N>0$，$\forall n>N$，$\sqrt[n]{u_n}\le q$，则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 $\exists N>0$，$\forall n>N$，$\sqrt[n]{u_n}\ge 1$，则 $\sum u_n$ 发散

推论（极限形式的根式判别法）

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}<1 \implies \sum u_n$ 收敛

(2) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}>1 \implies \sum u_n$ 发散

注：比式判别法有效时，根式判别法总是有效的，此因为 $\sum u_n$ 总有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}\le\underline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{u_n}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

定理 9.3.5（拉贝判别法（Raabe））

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) 若 $\exists r>1$ 使当 $n>>1$ 时 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge r$，则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若当 $n>>1$ 时 $n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\le 1$，则 $\sum u_n$ 发散

推论

设有正项级数 $\sum u_n$，那么

(1) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)>1$，则 $\sum u_n$ 收敛

(2) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)<1$，则 $\sum u_n$ 发散

注：当 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\le 1\le\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ 时，推论失效

证：(1) 选 $p\in(1,r)$，由当 $n>>1$ 时，$n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)\ge r$，有 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 1-\frac{r}{n}$，

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p}{\frac{r}{n}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(1-x)^p}{rx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{p(1-x)^{p-1}}{r}=\dfrac{p}{r}<1$，

故而当 $n>>1$ 时，$\frac{r}{n}>1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p$

从而，$n>>1$ 时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\le 1-\frac{r}{n}<\left(1-\frac{1}{n}\right)^p=\left(\frac{n-1}{n}\right)^p$$

于是，$\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$u_{n+1}=\frac{u_{n+1}}{u_n}\cdot\frac{u_n}{u_{n-1}}\cdot\cdots\cdot\frac{u_{N+1}}{u_N}\cdot u_N\le\left(\frac{n-1}{n}\right)^p\cdot\left(\frac{n-2}{n-1}\right)^p\cdot\cdots\cdot\left(\frac{N-1}{N}\right)^p u_N$$

$$=\left(\frac{N-1}{n}\right)^p u_N$$

$$=\frac{(N-1)^p u_N}{n^p}$$

Date.　　　Page.

因此，由 $p>1$ 时 $\sum\frac{1}{n^p}$ 收敛得 $\sum u_n$ 收敛.

(2) 若当 $n>>1$ 时，$n(1-\frac{u_{n+1}}{u_n})\leq 1$，即 $\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq\frac{n-1}{n}$

从而 $\exists N>0$，当 $n>N$ 时，

$$u_{n+1}\geq\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{N-1}{N}u_N=\frac{N-1}{n}u_N$$

而 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，故 $\sum u_n$ 发散

定理 9.3.6

设 f 为 $[a,+\infty)$ 上的非负函数，并且 f 在 $\forall[a,b]\subseteq[a,+\infty)$ 常义可积，

又设 $a=a_1<a_2<\cdots<a_n<a_{n+1}<\cdots$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，

$$u_n:=\int_{a_n}^{a_{n+1}}f(x)dx,\quad n=1,2,\cdots$$

那么 $\sum u_n$ 与 $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ 同敛散（同时收敛或同时发散到 $+\infty$），且

$$\sum_1^{\infty}u_n=\int_a^{+\infty}f(x)dx$$

定理 9.3.6$\frac{1}{2}$

设有正项级数 $\sum u_n$，如果 $u_n\geq u_{n+1}$（$\forall n$），那么

$$\sum_n u_n \text{ 收敛} \iff \sum_m 2^m u_{2^m} \text{ 收敛}$$

证要：令 $S_n:=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$，$T_m:=\sum\limits_{k=0}^{m}2^k u_{2^k}$，那么

当 $n<2^m$ 时，$S_n\leq T_{m-1}$，

当 $n>2^m$ 时，$S_n\geq\frac{1}{2}T_m$.

9.4 任意项级数

定义 9.4.1

设有 $\sum (-1)^{n+1} u_n$，其中 $u_n > 0\ (\forall n)$，那么称这种级数为交错级数.

若还有 $\{u_n\}$ 单调且 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$，则称此级数为 Leibniz 级数.

定理 9.4.1

设有 $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} u_n$（不必是交错级数，形式交错的），那么

(a) $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} u_n$ 收敛 $\iff \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 且 $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1}(u_n - u_{n+1})$ 收敛

(b) 当 $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} u_n$ 收敛时，$\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} u_n = \frac{1}{2}\left[u_1 + \sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1}(u_n - u_{n+1})\right]$

推论1　Leibniz 级数收敛

推论2　若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ 且 $\sum\limits_1^\infty |u_{n+1} - u_n|$ 收敛，则 $\sum\limits_1^\infty (-1)^{n+1} u_n$ 收敛

证要：注意到 $2\sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1}(u_k - u_{k+1}) + u_1 + (-1)^{n+1} u_n$，即证

定理 9.4.3　~~Abel - Dirichlet 判别法~~　Abel 定理

对 $\sum\limits_1^\infty u_k v_k$，令 $S_n = \sum\limits_1^n u_k$，并设 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n v_n = a$（存在有限），那么

(a) $\sum\limits_1^\infty u_n v_n$ 收敛 $\iff \sum\limits_1^\infty S_n(v_n - v_{n+1})$ 收敛

(b) 当 $\sum\limits_1^\infty S_n(v_n - v_{n+1})$ 收敛时，$\sum\limits_1^\infty u_n v_n = a + \sum\limits_1^\infty S_n(v_n - v_{n+1})$

证：令 $\sigma_n := \sum\limits_1^n u_k v_k$，

则 $\sigma_n \xlongequal{S_0:=0} \sum\limits_1^n (S_k - S_{k-1}) v_k = S_n v_n + \sum\limits_1^{n} S_k(v_k - v_{k+1})$

推论3　~~Abel 定理~~　Abel 判别法

若 $\sum\limits_1^\infty a_n$ 收敛，$\{b_n\}_1^\infty$ 单调有界，则 $\sum\limits_1^\infty a_n b_n$ 收敛

推论4　Dirichlet 判别法

若 $\sum\limits_1^\infty a_n$ 的部分和数列有界，$\{b_n\}_1^\infty$ 单调收敛于0，则 $\sum\limits_1^\infty a_n b_n$ 收敛

推论5　A-D 判别法

对于 $\sum\limits_1^\infty u_n v_n$，如果 $\sum\limits_1^\infty u_n$ 的部分和数列有界，$\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$，且 $\sum\limits_1^\infty |v_n - v_{n+1}|$ 收敛，则 $\sum\limits_1^\infty u_n v_n$ 收敛

注：推论3 & 4 是推论5的推论.

定义 9.4.2

若 $\sum u_n$ 满足 $\sum |u_n|$ 收敛，则称 $\sum u_n$ 是绝对收敛的，或称 $\sum u_n$ 绝对收敛.

若$\sum u_n$收敛，而$\sum |u_n|$发散，则称$\sum u_n$是条件收敛的

定理 9.4.4

若$\sum u_n$绝对收敛，则$\sum u_n$收敛，且$\left|\sum u_n\right| \le \sum |u_n|$

引入记号：$a^+ := \frac{|a|+a}{2}$，$a^- := \frac{|a|-a}{2}$，$a \in \mathbb{R}$

从而$|a| = a^+ + a^-$，$a = a^+ - a^-$，且$a^+ \ge 0$，$a^- \ge 0$

定理 9.4.5

$\sum_1^\infty u_n$绝对收敛$\Longleftrightarrow$ $\sum_1^\infty u_n^+$和$\sum_1^\infty u_n^-$都收敛

当$\sum u_n$绝对收敛时，

$\sum_1^\infty |u_n| = \sum_1^\infty u_n^+ + \sum_1^\infty u_n^-$，$\sum_1^\infty u_n = \sum_1^\infty u_n^+ - \sum_1^\infty u_n^-$

定理 9.4.6　　Riemann

若$\sum u_n$绝对收敛，则$\sum_1^\infty |u_{h(n)}| = \sum_1^\infty |u_n|$，$\sum_1^\infty u_{h(n)} = \sum_1^\infty u_n$，

其中$h: N \to N$是双射

定理 9.4.7　　Cauchy 定理

若$\sum_1^\infty u_n$和$\sum_1^\infty v_n$都绝对收敛，则它们的乘积项（即$u_i v_j$，$(i,j=1,2,\cdots)$）

按任意指定的排列顺序相加所得的级数$\sum w_n$也绝对收敛，且

$\sum |w_n| = \sum |u_n| \cdot \sum |v_n|$，　$\sum w_n = \sum u_n \cdot \sum v_n$

证要：显然，$\sum_{k=1}^n |w_k| \le \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^N |u_k| \cdot \sum_{k=1}^N |v_k|$　　$(\forall n)$

从而$\sum |w_n|$收敛，且

$$\sum |w_n| \le \lim_{N\to\infty} \sum_1^N |u_k| \cdot \sum_1^N |v_k| = \sum |u_n| \cdot \sum |v_n| \qquad (1)$$

又显然，$\forall n \ge 1$，有

$$\sum_1^n |u_k| \cdot \sum_1^n |v_k| \le \sum |w_n|，从而 \sum |u_n| \cdot \sum |v_n| \le \sum |w_n| \qquad (2)$$

结合(1)(2)，得

$$\sum_1^\infty |w_n| = \sum_1^\infty |u_n| \cdot \sum_1^\infty |v_n|$$

定义 9.4.3

对$\sum_1^\infty u_n$和$\sum_1^\infty v_n$，令

$w_n := u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \cdots + u_n v_1 = \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} v_{n-k}$，$n = 1, 2, \cdots$

那么称$\sum_1^\infty w_n$为$\sum_1^\infty u_n$和$\sum_1^\infty v_n$的 Cauchy 乘积

定理 9.4.8

如果 $\sum u_n$ 条件收敛，那么

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n^+ = \lim\limits_{n\to\infty} u_n^- = 0$，且 $\sum u_n^+ = \sum u_n^- = +\infty$ (*)

证明：$|u_n^\pm| \le |u_n| \to 0 \quad (n\to\infty)$

$\sum u_n = \sum u_n^+ - \sum u_n^-$，由反证法易知 $\sum u_n^+ = \sum u_n^- = +\infty$

定理 9.4.9

若 $\sum u_n$ 适合条件(*)，那么对 $-\infty \le \alpha \le \beta \le +\infty$，

存在 $\sum u_n$ 的重排 $\sum u_{h(n)}$，使得 $\sigma_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_{h(k)}$ 满足

$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sigma_n = \alpha$，$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sigma_n = \beta$

9.5 无穷乘积

定义 9.5.1

如果无穷乘积 $\prod p_n$ 的部分积列 $\{P_n\}$ 收敛于一个非零的有限数 P，则称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，并称 P 为它的积，记为 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n = P$

如果 ~~本身~~ $\{P_n\}$ 发散或收敛于 0，则称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散；

特别地，当 $\lim_{n\to\infty} P_n = 0$ 时，称 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 0.

定理 9.5.1

若无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛，则

(1) $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$；

(2) $\lim_{n\to\infty} \prod_{k=n}^{\infty} p_k = 1$.

由于无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛的必要条件是 $\lim_{n\to\infty} p_n = 1$，因此必定存在正整数 N，当 $n > N$ 时成立 $p_n > 0$. 而无穷乘积的敛散性与它的前 N 项非零因子无关，所以在讨论无穷乘积 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的敛散性问题时，我们都假定 $p_n > 0$.

定理 9.5.2

设 $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 的所有因子 $p_n > 0$，那么

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 收敛

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散于 0 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} \ln p_n$ 发散于 $-\infty$

推论 1

设 $a_n \geq 0$ $(\forall n)$，那么

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 发散于 $+\infty$ $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

证要：当 $n \gg 1$ 时，$\frac{1}{2} a_n \leq \ln(1+a_n) \leq a_n$.

推论 $1\frac{1}{2}$

设 $-1 < a_n \leq 0$ $(\forall n)$，那么

(a) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(b) $\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 发散于 0 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\infty$

证：$\prod_{n=1}^{\infty} (1+a_n)$ 收敛 $\Longleftrightarrow$ $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a_n}$ 收敛. 再使用推论 1