第三章

1. 设X是概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, P)$上的随机变量，对$x\in\mathbb{R}$，
   $F(x)=P(X\le x)$称为X的分布函数，记为$X\sim F(x)$.
   故要注意分布函数存在一种求和关系，并不直接等同于概率.

2. 分布函数与概率的关系
   ① $0\le F(x)\le 1$.
   ② $P(a<x\le b)=P(x\le b)-P(x\le a)=F(b)-F(a)$.
   ③ $P(X>x)=P(X<\infty)-P(X\le x)=1-F(x)$.
   ④ $P(X<x)=F(x-0)$. $F(x)$在x处的左极限.
   ⑤ $P(X=x)=F(x)-F(x-0)$.
   若分布函数是一个连续函数，即$P(X=x)=0$，则区间两端点开闭不影响区间的概率.

3. 离散型随机变量X的分布律$\{p_k, k\ge 1\}$与其分布函数相互唯一决定.
   $F(x)=P(X\le x)=\sum_{x_k\le x}P(X=x_k)=\sum_{x_k\le x}p_k$.
   $p_k=P(X=x_k)=P(X\le x_k)-P(X<x_k)=F(x_k)-F(x_k-0)$.

4. 二项分布 $X\sim B(n,p)$
   ① $p_k=P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$k=0,1,2,\cdots,n$.(有限)
   ② 对于二项分布，$\{X=[(n+1)p]\}$发生的概率最大.

5. 泊松分布 $X\sim P(\lambda)$
   ① Poisson定理：设对$\forall n\in\mathbb{N}^*$，$0<p_n<1$.
   若$\lim_{n\to\infty}np_n=\lambda>0$，则对$\forall k\in\{0\}\cup\mathbb{Z}$有$\lim_{n\to\infty}C_n^k p_n^k(1-p)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. $k=0,1,\cdots$(无穷)
   ② $p_k=P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$k=0,1,2,\cdots$.(无穷)
   ③ 对于Poisson分布，$\{X=[\lambda]\}$发生的概率最大.
   ④ 设一事件的发生满足Poisson分布$P(\lambda)$，该事件内的一事件发生概率为p，
   则事件内事件的概率分布为$P(p\lambda)$.
   运用全概率公式可推得.

n件中次品数　共N件　恰M件次品　从中取n件.

6. 超几何分布 $X\sim H(N,M,n)$

① $p_k=P(X=k)=\dfrac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$. $k=0,1,2,\cdots,l$.

② 超几何分布的极限分布是二项分布. $\lim\limits_{N\to+\infty}\dfrac{M}{N}=p$.(次品概率).

③ 对于超几何分布,$\{X=[(n+1)\dfrac{M+1}{N+2}]\}$发生概率最大.

7. 几何分布: $P(X=k)=p(1-p)^{k-1}$, $k=1,2,\cdots$.

意义:一个事件反复进行k次,指定某一次成功,剩下(k-1)次均失败.

8. 连续型随机变量

① X:连续型随机变量; $F(x)$:连续型分布函数; $f(x)$:密度函数.

② $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$, $-\infty<x<+\infty$, 变上限积分.

③ 几何意义:

(I) 密度曲线$f(x)$位于x轴上方且与x轴围成的区域面积为1.

(II) $P(X\le x)$就是指以$(-\infty,x)$为底,$y=f(x)$为顶的曲边梯形的面积.

④ 对任意常数$a<b$, $P(a<X\le b)=\int_a^b f(x)\,dx$.

⑤ 连续型随机变量的分布函数是连续的,但分布函数的连续性不能推出$F(x)$是连续型分布函数.

9. 均匀分布 $X\sim U[a,b]$

① 定义: X是概率空间上的随机变量,若X的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$a<b$为常数,则称X服从$[a,b]$上的均匀分布,记作$X\sim U[a,b]$.

② 若$X\sim U[a,b]$,则其分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$

③ 对$\forall [c,c+l]\subset[a,b]$,

$P(c<X\le c+l)=\int_c^{c+l} f(x)\,dx=\dfrac{l}{b-a}$.

说明任意子区间$[c,c+l]$取值概率只与子区间的长度l成正比,而与子区间位置无关.

10. 指数分布 $X \sim E(\lambda)$

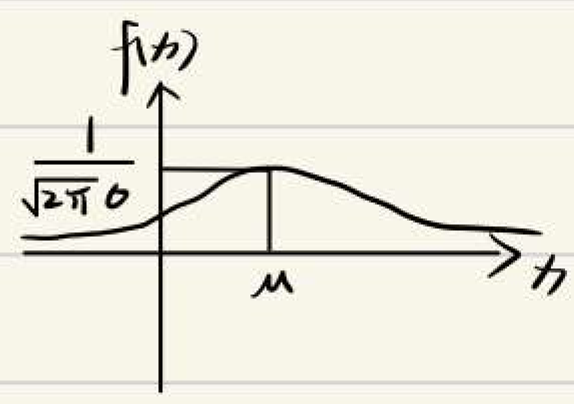
(1) X服从λ的指数分布，概率密度函数 $f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(2) 分布函数 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\geq 0,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

(3) 定理(无记忆性)：设X是连续型非负变量，则 $X\sim E(\lambda) \Leftrightarrow$ 对 $\forall s,t\geq 0$，$P(X>s+t \mid X>s)=P(X>t)$.

无记忆性：仪器工作了s h后再继续工作t h的概率等于该仪器刚开始工作就能工作t h的概率.

11. 正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$



(1) X的概率密度函数为 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(2) 分布函数 $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}dy$，$x\in(-\infty,+\infty)$.

重要性质：$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$.（分布函数中的$\sqrt{2\pi}$用于调整值）.

(3) 密度函数$f(x)$的几何特性：

①$f(x)$的最大值点在$x=\mu$处，最大值为$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$.

②$f(x)$的图形关于直线$x=\mu$对称.

③$f(x)$的图形在$x=\mu\pm\sigma$处有拐点.

④当$x\to\infty$时，曲线以x轴为渐近线.

⑤μ固定时，$\sigma\uparrow$，$f(x)_{max}\downarrow$，$f(x)$图形越平、越宽.

(4) 关系

$F(\mu)=\frac{1}{2}$，$F(\mu-x)=1-F(\mu+x)$.

(5) 标准正态分布 $X\sim N(0,1)$

密度函数 $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

分布函数 $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{y^2}{2}}dy$.

$\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$，$\Phi(0)=\frac{1}{2}$.

(6) 一般正态分布 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 与标准正态分布联系.

$F(x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

$P(a<X\leq b)=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

$P(|X-\mu|<x\sigma)=2\Phi(x)-1$.

12. Γ分布随机变量 $X\sim\Gamma(\alpha,\beta)$

(1)密度函数：$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

注：$\alpha=1$时，退化为参数是β的指数分布.

重要关系：如果一段时间内释放的粒子数服从Poisson分布$P(\mu t)$，
则观测到第一个粒子时间服从指数分布.
则观测到第k个粒子时间服从$\Gamma(k,\mu)$分布，故可知观测到各粒子等待的时间相互独立.

随机变量函数及其分布：记$F_X(x)$ $F_Y(y)$分别表示随机变量X与Y的分布函数.

1. 设随机变量X有(分段)连续概率密度函数$f_X(x)$，$Y=aX+b$，其中a.b为常数，$a\neq0$，求Y的密度函数$f_Y(y)$.

求密度函数要首先求分布函数，再对分布函数求导(注意大多数时候是复合函数求导)

解：$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(aX+b\leq y)=\begin{cases}P(X\leq\frac{y-b}{a}), & a>0\\ P(X\geq\frac{y-b}{a}), & a<0\end{cases}=\begin{cases}F_X(\frac{y-b}{a}), & a>0\\ 1-F_X(\frac{y-b}{a}), & a<0\end{cases}$

故$a>0$时，$f_Y(y)=[F_Y(y)]'_y=f_X(\frac{y-b}{a})\cdot\frac{1}{a}$.
$a<0$时，$f_Y(y)=-\frac{1}{a}f_X(\frac{y-b}{a})$.
故$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X(\frac{y-b}{a})$.

2. 设$X\sim N(\mu,\sigma^2)$，求$Y=aX+b$的概率密度函数$f_Y(y)$. 其中a.b均为常数，$a\neq0$.

意义：线性变换后仍是正态分布，期望成线性变化，方差只与变化系数有关.

解：由1.知$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}f_X(\frac{y-b}{a})$.
因$x\sim N(\mu,\sigma^2)$知，$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.
故$f_Y(y)=\frac{1}{|a|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(y-b-a\mu)^2}{2(a\sigma)^2}}$
即新的正态分布$Y\sim N(a\mu+b,(a\sigma)^2)$.

3. 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$的密度函数$f_Y(y)$.

意义：正态分布标准化.

解：应用T2. $a=\frac{1}{\sigma}$，$b=-\frac{\mu}{\sigma}$.

故$Y \sim N(0,1)$. Y满足标准正态分布.

4. 设$X \sim U[1,3]$，求$Y=4X-1$的密度函数.

解：由均匀分布知x的密度函数 $f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1\le x\le 3\\ 0, & 其它\end{cases}$ 分布函数 $F_X(x)=\begin{cases}0, & x\le 1\\ \frac{x}{2}, & 1<x\le 3\\ 1, & x>3\end{cases}$

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(4X-1\le y)=P(X\le \frac{y+1}{4})=F(\frac{y+1}{4})$.

$f_Y(y)=f(\frac{y+1}{4})\cdot\frac{1}{4}=\begin{cases}\frac{1}{8}, & \frac{y+1}{4}\in[1,3],\ y\in[3,11]\\ 0, & 其他\end{cases}$

5. 设X有连续概率密度函数，$f_X(x)$，$Y=cX^2$，$c>0$，求Y的密度函数$f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(cX^2\le y)$，$y<0$时概率必为0，故只讨论$y\ge 0$.

$=P(-\sqrt{\frac{y}{c}}\le X\le\sqrt{\frac{y}{c}})=F_X(\sqrt{\frac{y}{c}})-F_X(-\sqrt{\frac{y}{c}})$.

两边同时求导 $f_Y(y)=\frac{1}{2\sqrt{cy}}(f_X(\sqrt{\frac{y}{c}})+f_X(-\sqrt{\frac{y}{c}}))$

6. 设$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，求$Y=e^X$的概率密度函数$f_Y(y)$.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(e^X\le y)=P(X\le \ln y)=F_X(\ln y)$

$f_Y(y)=f_X(\ln y)\frac{1}{y}$.

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{1}{y}, & y>0\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$

7. 设$X \sim U(0,1)$，$\varphi^{-1}(x)$是$\varphi(x)$的反函数，证明：$Y=\varphi^{-1}(X)$服从标准正态分布$N(0,1)$.

Pf：由正态分布知 $F(x)=P(X\le x)=x$. $x\in(0,1)$.

$F_Y(y)=P(Y\le y)=P(\varphi^{-1}(x)\le y)=P(X\le\varphi(y))=\varphi(y)$.

从而$Y \sim N(0,1)$.